دفترچه پاسخ

آزمون شماره (۹)
جمعه
۱۴۰۵/۰۸/۰۸

آزمون‌های سراسری گاج

گزینه درست را انتخاب کنید.

سال تحصیلی ۱۴۰۶-۱۴۰۵

پاسخنامه دوازدهم ریاضی

دوره دوم متوسطه

عناوین مواد امتحانی آزمون گروه آزمایشی ریاضی، تعداد سؤالات

ردیف		مواد امتحانی		تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	ریاضیات	حسابان ۲		۱۰	۱	۱۰
		هندسه ۳		۱۰	۱۱	۲۰
		ریاضیات گسسته		۱۰	۲۱	۳۰
		آمار و احتمال		۱۰	۳۱	۴۰
		ریاضی ۱		۱۰	۴۱	۵۰
		هندسه ۱		۱۰	۵۱	۶۰
		حسابان ۱		۱۰	۶۱	۷۰
		هندسه ۲		۱۰	۷۱	۸۰
۲	فیزیک	فیزیک ۳	پیشروی آهسته	۲۰	۸۱	۱۰۰
			پیشروی سریع	۲۰	۱۰۱	۱۲۰
		فیزیک ۱		۱۰	۱۲۱	۱۳۰
		فیزیک ۲		۱۰	۱۳۱	۱۴۰
۳	شیمی	شیمی ۳		۱۵	۱۴۱	۱۵۵
		شیمی ۱		۱۵	۱۵۶	۱۷۰
		شیمی ۲		۱۵	۱۷۱	۱۸۵

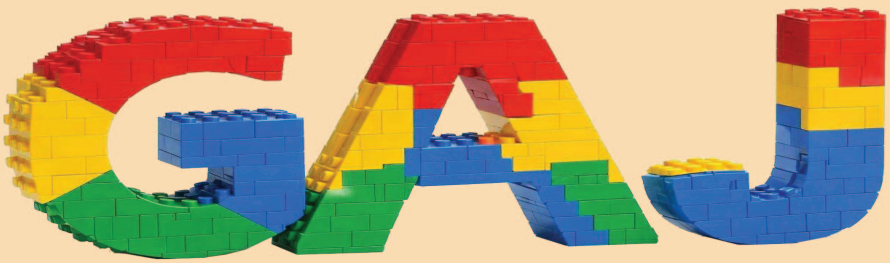
حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و ...)، قبل و یا بعد از برگزاری آزمون، برای عموم ممنوع است (حتی با ذکر منبع) و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

دوازدهم ریاضی

آزمون‌های سراسری گاج

دروس	مسئول درس	ناظرعلمی	طراحان	ویراستاران علمی
ریاضیات	زهراساسانی	سیروس نصیری	سیروس نصیری مجید فرهمندپور	زهرا ساسانی علیرضا عباسی‌زاهد علی بهرمندپور
فیزیک	محسن قاسمی	محمدآهنگر	محمد آهنگر سجاد صادقی‌زاده سیدرضا اعلائی حسین عبدوی نژاد آرمین کمالی زهره آقا محمدی	محسن قاسمی حسین عبدوی نژاد سیما هداوند
شیمی	فاطمه عبداله‌خانی	پویا الفتی		فاطمه عبداله‌خانی امیرعلی برخورداریون محمدی

تیم آزمون‌های سراسری گاج
مدیریت آزمون‌سازی: زهرا خردمند
مسئول دفترچه: سپیده احمدیان
کنترل پروژه: ستاره سرکمریان
صفحه‌آرا: فاطمه میرزایی
امور فنی: آزاده شکرزبان ـ ربابه الطافی ـ فاطمه میرزایی



چیدن هوشمندانه لگوی یادگیری

همراهی آزمون‌های گاج

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir



فروشگاه مرکزی گاج: تهران ـ خیابان انقلاب نبش بازارچه کتاب

۰۲۱-۶۴۲۰

www.azmoon.gaj.ir
www.gajmarket.com



ریاضیات

۱ / ۳

$g(x)=1-2f(2x)\xrightarrow{(3,-1)}-1=1-2f(6)\Rightarrow f(6)=1$

$h(x)=f(x+1)+1\xrightarrow{x=5}h(5)=f(6)+1=1+1=2\Rightarrow h(5)=2$

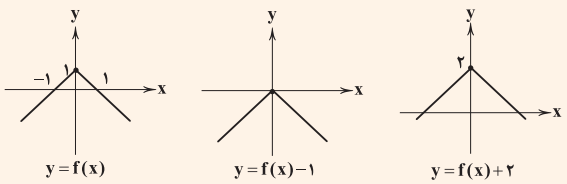
$\Rightarrow (5,2)\in h(x)$

درسنامه

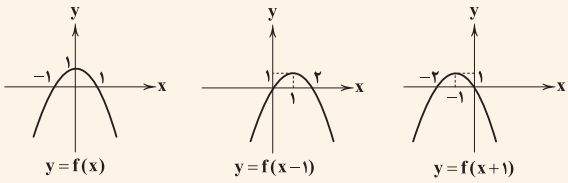
انتقال نمودار:

اگر نمودار $f(x)$ را داشته باشیم، آن‌گاه:

۱) برای رسم نمودار $f(x)+k$ کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد در راستای محور yها جابه‌جا کنیم. اگر $k>0$ باشد در جهت مثبت و اگر $k<0$ باشد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. مانند نمونهٔ زیر:



۲) برای رسم نمودار $f(x+k)$ کافی است نمودار $f(x)$ را $|k|$ واحد در راستای محور xها جابه‌جا کنیم. اگر $k>0$ باشد، در جهت منفی و اگر $k<0$ باشد در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. مانند نمونهٔ زیر:



انبساط و انقباض:

اگر نمودار $f(x)$ را داشته باشیم، آن‌گاه:

۱) برای رسم نمودار $f(kx)$، اگر $k>0$ باشد کافی است نمودار $f(x)$ را در راستای محور xها $\frac{1}{k}$ برابر کنیم (یعنی دامنهٔ آن را $\frac{1}{k}$ برابر کنیم).

✓ اگر $k>1$ باشد، تابع منقبض می‌شود.

✓ اگر $0<k<1$ باشد، تابع منبسط می‌شود.

✓ اگر $k=1$ باشد تابع تغییر نمی‌کند.

۲) برای رسم نمودار $kf(x)$، اگر $k>0$ باشد کافی است نمودار $f(x)$ را در راستای yها، k برابر کنیم (یعنی برد $f(x)$ را k برابر می‌کنیم.)

اگر $k>1$ باشد، تابع منبسط می‌شود.

✓ اگر $0<k<1$ باشد، تابع منقبض می‌شود.

✓ اگر $k=1$ باشد تابع تغییر نمی‌کند.

۱ / ۲

$p(x)=2x^2(x^3-3x^2+3x-1)-mx^5+(m+4)x^4$

$\Rightarrow p(x)=(2-m)x^5+(m-2)x^4+6x^3+2x^2$

اگر $m=2$ باشد، درجه چندجمله‌ای ۵ نخواهد بود، بنابراین:

$p(x)=6x^3-2x^2$

بنابراین درجهٔ $p(x)$ برابر ۳ است.

درسنامه

تابع چندجمله‌ای:

هر تابع به صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ که در آن $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n\neq 0$ باشد، یک تابع چندجمله‌ای درجهٔ n می‌گوییم. تابع چندجمله‌ای از درجهٔ اول همان تابع خطی $y=a_1x+a_0$، تابع چندجمله‌ای از درجهٔ دوم همان سهمی است و تابع چندجمله‌ای از درجهٔ صفر همان تابع ثابت غیرصفر است. دقت کنید که دامنهٔ تابع چندجمله‌ای، $\mathbb{R}$ می‌باشد.

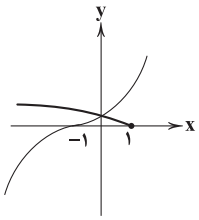
توجه: تابع $f(x)=0$ فاقد درجه است.

۳ / ۲

معادله را به صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$x^3+3x^2+3x+1=\sqrt{1-x}\Rightarrow (x+1)^3=\sqrt{1-x}\quad (1)$

حال دو تابع $y=(x+1)^3$ و $y=\sqrt{1-x}$ را رسم می‌کنیم.

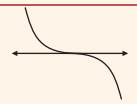
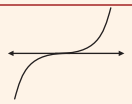


دو تابع در یک نقطه با هم برخورد می‌کنند، بنابراین معادلهٔ (۱) دارای یک ریشهٔ حقیقی است.

درسنامه

انتقال تابع درجهٔ سوم:

توابع درجهٔ سوم به صورت $y=ax^3+bx^2+cx+d$ که ضابطهٔ آن‌ها قابل تبدیل به فرم $y=a(x-x_0)^3+y_0$ می‌باشد. و با استفاده از خواص تبدیل، نمودار تابع از روی تابع $y=x^3$ قابل رسم هستند و نمودار کلی آن‌ها به فرم زیر است.

	
(در حالت $a<0$)	(در حالت $a>0$)

نکته: در توابع درجهٔ سوم $y=ax^3+bx^2+cx+d$ طول مرکز تقارن $-\frac{b}{3a}$ خواهد بود و در فرم $y=a(x-x_0)^3+y_0$ مختصات مرکز تقارن $W(x_0,y_0)$ می‌باشد.

نکته: برای تبدیل بعضی از توابع درجهٔ ۳ به صورت $y=ax^3+bx^2+cx+d$ که قابل تبدیل به فرم $y=a(x-x_0)^3+y_0$ هستند می‌توان از اتحادهای $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$ استفاده نمود.

۴ / ۴

شیب این خط باید منفی باشد.

$\frac{2m-m}{(m+1)-(m+3)}<0\Rightarrow \frac{m}{-2}<0\Rightarrow m>0$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

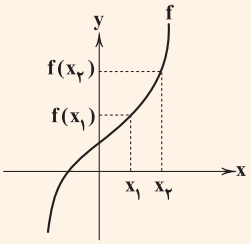
بنابراین طول نقطهٔ $(m , -m)$ مثبت و عرض آن منفی است. پس در ناحیهٔ چهارم قرار دارد.

درسنامه

تعریف تابع صعودی اکید:

اگر x در دامنهٔ تابع f افزایش یابد و مقدار y نیز افزایش یابد، گوییم تابع f صعودی اکید است.

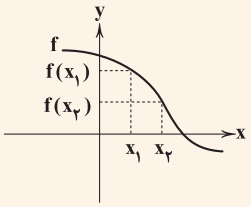
به نمودار زیر توجه کنید با زیاد شدن x مقدار y نیز زیاد می‌شود.



$$x_۱ , x_۲ \in D_f , x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) < f(x_۲)$$

تعریف تابع نزولی اکید:

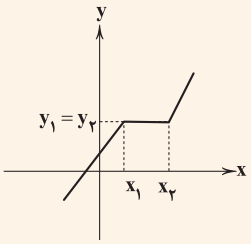
اگر x در دامنهٔ تابع f افزایش یابد و مقدار y کاهش یابد، گوییم تابع f نزولی اکید است.



$$x_۱ , x_۲ \in D_f , x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) > f(x_۲)$$

تعریف تابع صعودی:

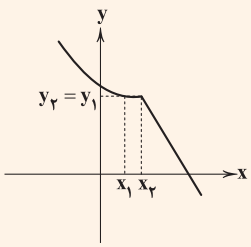
اگر x در دامنهٔ تابع افزایش یابد و مقدار y گاهی افزایش یابد و گاهی ثابت بماند و به عبارتی کاهش نیابد، گوییم تابع f صعودی است.



$$x_۱ , x_۲ \in D_f , x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) \le f(x_۲)$$

تعریف تابع نزولی:

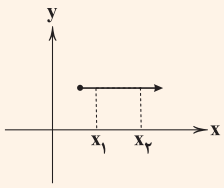
اگر x در دامنهٔ تابع f افزایش یابد و مقدار گاهی کاهش یابد و گاهی ثابت بماند و به عبارتی افزایش نیابد، آن‌گاه گوییم تابع f نزولی است.



$$x_۱ , x_۲ \in D_f , x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) \ge f(x_۲)$$

تعریف تابع ثابت (هم صعودی و هم نزولی):

اگر x در دامنهٔ تابع f افزایش یابد و مقدار y ثابت بماند، آن‌گاه گوییم تابع f ثابت است.



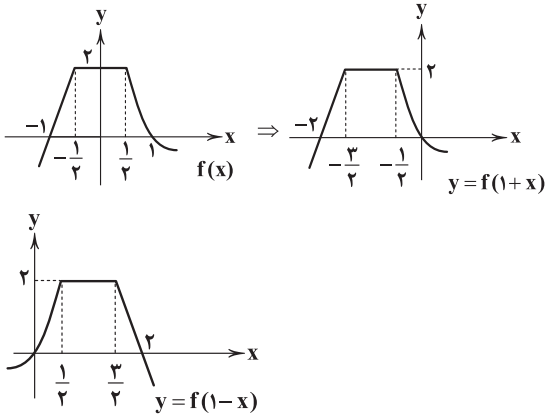
$$x_۱ , x_۲ \in D_f , x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) = f(x_۲)$$

نکته: اگر تابع f صعودی (صعودی اکید) یا نزولی (نزولی اکید) باشد، آن‌گاه گوییم تابع f یکنواست. (اکیداً یکنوا)

نکته: اگر تابع f روی دامنهٔ خود گاهی صعودی (صعودی اکید) و گاهی نزولی (نزولی اکید) باشد، تابع را غیریکنوا می‌نامیم.

۵ / ۲ مراحل رسم تابع $f(۱-x)$ به صورت زیر است.

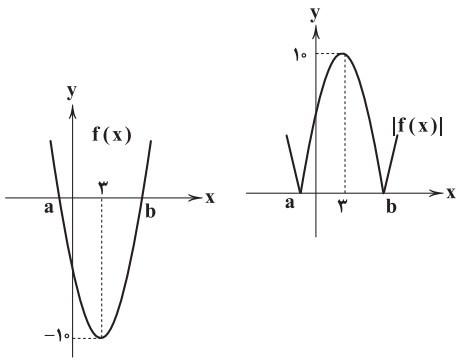
$$f(\frac{x}{۲}) \to f(x) \to f(x+۱) \to f(۱-x)$$

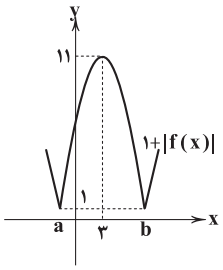


تابع $f(۱-x)$ در بازهٔ $[\frac{۳}{۲} , +\infty)$ اکیداً نزولی است.

۶ / ۱ نمودار تابع $f(x)$ یک سهمی است:

$$f(x) = x^۲ - ۶x - ۱ = (x-۳)^۲ - ۱۰$$





SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

$$f(x)=0 \Rightarrow x^2-6x-1=0 \Rightarrow x=3\pm\sqrt{10} \Rightarrow \begin{cases} a=3-\sqrt{10} \\ b=3+\sqrt{10} \end{cases}$$

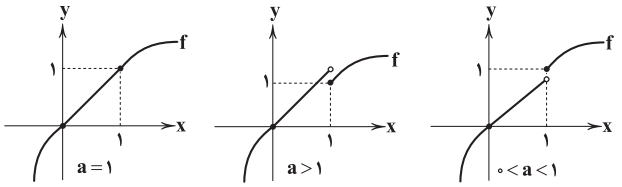
تابع در بازه‌های $[3,3+\sqrt{10}]$ و $[3-\sqrt{10},-\infty)$ اکیداً نزولی است.

۷ ۳ تابع درجه دومی که رأس آن در بازهٔ $(3,1)$ قرار گیرد، در این بازهٔ غیریکنوا خواهد بود. در تابع $h(x)$ طول رأس $x=2$ است.

۸ ۳ چون x^3 اکیداً صعودی است؛ پس باید $\frac{1-k}{1+k}$ مثبت باشد.

$$\frac{1-k}{1+k}>0 \Rightarrow -1<k<1$$

۹ ۲ دو تابع x^3 و $\sqrt{x}$ در بازه‌های داده‌شده اکیداً صعودی هستند. برای آن‌که $f(x)$ اکیداً صعودی باشد باید اولاً $a>0$ باشد و همچنین باید $a\le 1$ باشد، در غیر این‌صورت تابع f غیریکنوا خواهد بود. نمودار تابع f را در حالت‌های مختلف ببینید.



بنابراین اگر $0<a\le 1$ باشد، تابع f اکیداً صعودی خواهد بود.

۱۰ ۲

$$5-a^2>0 \Rightarrow a^2<5 \Rightarrow -\sqrt{5}<a<\sqrt{5}$$

$$5-a^2\neq 1 \Rightarrow a^2\neq 4 \Rightarrow a\neq \pm 2$$

دامنهٔ تابع $(-\sqrt{5},\sqrt{5})-\{2,-2\}$ است که فقط عدد طبیعی $a=1$ در آن صدق می‌کند که در این‌صورت $f(x)=\log_4 x$ خواهد بود و تابع اکیداً صعودی است.

$$\log_3(1-x)>\log_3(x+4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-x>0 \Rightarrow x<1 \\ x+4>0 \Rightarrow x>-4 \\ 1-x>x+4 \Rightarrow x<-\frac{3}{2} \end{cases} \xrightarrow{\cap} x\in(-4,-\frac{3}{2})$$

درسنامه

اگر $f(x)$ تابعی صعودی باشد، به‌ازای هر $m,n\in D_f$ داریم:

$$m\le n \Leftrightarrow f(m)\le f(n)$$

و اگر $f(x)$ تابعی نزولی باشد، به‌ازای هر $m,n\in D_f$ داریم:

$$m\le n \Leftrightarrow f(m)\ge f(n)$$

۱۱ ۲ در ماتریس اسکالر درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی صفر و درایه‌های روی قطر اصلی برابرند.

$$\begin{cases} a+2=0 \Rightarrow a=-2 \\ b+1=0 \Rightarrow b=-1 \\ c-2=0 \Rightarrow c=2 \end{cases} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} -2-2x & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow -2-2x=-3 \Rightarrow -2x=-1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$abcx=(-2)(-1)(2)(\frac{1}{2})=2$$

درسنامه

ماتریس اسکالر:

ماتریسی قطری که درایه‌های روی قطر اصلی برابرند، ماتریس اسکالر نام دارد. رابطهٔ ماتریس اسکالر به صورت $a_{ij}=\begin{cases} 0 & i\neq j \\ \lambda & i=j \end{cases}$ تعریف می‌شود.

۱۲ ۱

$$A=2B=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow B=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

$$X+I=A-B=2B-B=B \Rightarrow X=B-I=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های سطر اول $\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}+2$ خواهد بود.

درسنامه

جمع و تفریق دو ماتریس

برای این‌که بتوانیم دو ماتریس را جمع (تفریق) کنیم، باید هم‌مرتبه باشند و کافی است که درایه‌ها را نظیر به نظیر جمع (تفریق) کنیم. یعنی:

$$A\pm B=[a_{ij}]_{m\times n}\pm[b_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}\pm b_{ij}]_{m\times n}$$

۱۳ ۴

$$A\times B=[1\ \ 2\ \ \dots\ \ 20]\times\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}=1+2+\dots+20=\frac{20\times 21}{2}=210$$

درسنامه

ضرب ماتریس

فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times q}$ باشند، شرط ضرب‌پذیری $A\times B$ این است که $n=p$ باشد، یعنی تعداد ستون‌های ماتریس اول برابر تعداد سطرهای ماتریس دوم باشد و اگر این‌طور باشد، آن‌گاه:

$$A\times B=[a_{ij}]_{m\times n}\times[b_{ij}]_{n\times q}=[c_{ij}]_{m\times q}=C$$

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

اما عنصرهای ماتریس C:

برای به دست آوردن درایهٔ c_{ij} از ماتریس C باید سطر iام از ماتریس A در ستون jام از ماتریس B ضرب شود. مثلاً اگر $A=[a_{ij}]_{2\times 3}$ و $B=[b_{ij}]_{3\times 2}$ باشد:

$$A\times B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2\times 3}\times\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}_{3\times 2}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

$$\Rightarrow \begin{cases} c_{11}=\sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k1}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} \\ c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ \vdots \end{cases}$$

تذکر: حاصل‌ضرب ماتریس سطری در ستونی یک عدد می‌شود.

۱۴ ۴

$$(A^2+AB+BA+B^2)(A+B)=(A+B)^3$$

$$(A+B)^2=\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&3\\0&1\end{bmatrix}$$

$$(A+B)^3=\begin{bmatrix}4&3\\0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&7\\0&1\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌ها برابر ۱۶ است.

درسنامه

در حالت کلی اتحادهای جبری برای ماتریس‌ها برقرار نیست ولی اگر برقرار باشد، دو ماتریس تعویض‌پذیرند و بالعکس؛ مثلاً اگر $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ باشد، نتیجه می‌شود که $AB=BA$. در مورد همهٔ اتحادها این داستان برقرار است. در غیر این صورت حق استفاده از اتحاد را نداریم. مثلاً اگر $AB\neq BA$، آن‌گاه:

$$(A+B)^2=(A+B)\times(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$$

۱۵ ۴

$$\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}\Rightarrow x=\frac{d}{ad-bc}$$

درسنامه

وارون ماتریس ۲×۲

اگر $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$، با شرط $|A|\neq 0$ معکوس ماتریس A از رابطهٔ $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$ به دست می‌آید؛ پس:

$$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$$

۱۶ ۱

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-1&2\\3&4\end{bmatrix}\Rightarrow A=\frac{1}{-4-6}\begin{bmatrix}4&-2\\-3&-1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 10A=\begin{bmatrix}-4&2\\3&1\end{bmatrix}$$

$$10A+A^{-1}=\begin{bmatrix}-4&2\\3&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&4\\6&5\end{bmatrix}$$

۱۷ ۴

اگر طرفین دو رابطه را جمع کنیم داریم:

$$2A=[i^2-i+j^2-j]_{2\times 2}=\begin{bmatrix}0&2\\2&4\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}0&1\\1&2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=-\begin{bmatrix}2&-1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1\\1&0\end{bmatrix}$$

۱۸ ۱

$$A+B=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}m&1\\4&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m+2&2\\3&1\end{bmatrix}$$

اگر $A+B$ وارون‌ناپذیر باشد، دترمینان آن صفر است.

$$\begin{vmatrix}m+2&2\\3&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow m+2-6=0\Rightarrow m=4$$

۱۹ ۲

$$\begin{bmatrix}1&-2\\-1&3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}3&2\\1&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&-2\\-1&3\end{bmatrix}^{-1}+I=\begin{bmatrix}3&2\\1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&2\\1&2\end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix}1&-2\\-1&3\end{bmatrix}^{-1}+I\right)^{-1}=\begin{bmatrix}4&2\\1&2\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2&-2\\-1&4\end{bmatrix}\Rightarrow a+d=1$$

۲۰ ۱

ماتریس A قطری است پس:

$$\begin{cases}x+2=0\Rightarrow x=-2\\ y-3=0\Rightarrow y=3\end{cases}$$

$$B=\begin{bmatrix}-2&a\\-1&-6\end{bmatrix}\Rightarrow|B|=12+a\neq 0\Rightarrow a\neq -12$$

۲۱ ۲

$$\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a}\geq 2(a-b)\Leftrightarrow\frac{a^3-b^3}{ab}\geq 2(a-b)$$

$$\xleftrightarrow{\times ab>0} a^3-b^3\geq 2ab(a-b)$$

$$\Leftrightarrow(a-b)(a^2+ab+b^2)\geq 2ab(a-b)$$

$$\xleftrightarrow{\div(a-b)>0} a^2+ab+b^2\geq 2ab$$

$$\Leftrightarrow a^2-ab+b^2\geq 0\xleftrightarrow{\times 2} 2a^2-2ab+2b^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2+a^2-2ab+b^2+b^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2+(a-b)^2+b^2\geq 0$$

درسنامه

- **اثبات بازگشتی:** گاهی برای اثبات نامساوی‌ها در اعداد حقیقی، فرض مناسب را برای شروع اثبات نمی‌دانیم، می‌توانیم از خود حکم شروع کنیم و با طی مراحل استنتاجی به رابطه‌ای بدیهی برسیم که البته این اثبات کامل نیست مگر آن‌که نشان دهیم تمامی مراحل طی‌شده بازگشت‌پذیر هستند.

۲۲ ۲

$$A=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}=2k\Rightarrow n(n+1)=4k$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

چون n و $(n+1)$ دو عدد متوالی هستند پس یکی زوج و دیگری فرد است و حتماً عدد زوج باید مضرب ۴ هم باشد، پس داریم:

$$n=4q$$

$$1\le n\le 25 \Rightarrow 1\le 4q\le 25 \Rightarrow \frac{1}{4}\le q\le \frac{25}{4} \Rightarrow q\in\{1,2,\dots,6\}$$

$$n+1=4q \Rightarrow n=4q-1$$

$$1\le n\le 25 \Rightarrow 1\le 4q-1\le 25 \Rightarrow 2\le 4q\le 26$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\le q\le \frac{26}{4} \Rightarrow q\in\{1,2,\dots,6\}$$

$$n(S)=25 \qquad n(A)=6+6=12$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{12}{25}=0/48$$

درسنامه

• **اثبات با در نظر گرفتن همه حالات:** گاهی برای اثبات درستی یک گزاره باید همه حالاتی که امکان رخ دادن، دارند را بررسی کرد.

تذکر:
$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

۲۳ / ۴

$$\begin{cases}7\mid 3x-5y \Rightarrow 7\times 7\mid 7x(3x-5y) \Rightarrow 49\mid 21x^2-35xy\\ 7\mid 3x-5y \Rightarrow 7^2\mid (3x-5y)^2 \Rightarrow 49\mid 9x^2-30xy+25y^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow 49\mid 21x^2-35xy-9x^2+30xy-25y^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases}49\mid 12x^2-5xy-25y^2\\ 49\mid 49xy+49y^2\end{cases} \Rightarrow 49\mid 12x^2+44xy+24y^2$$

بنابراین $m=44$.

درسنامه

• **عاد کردن:** اگر a و b دو عدد صحیح باشند و $a\neq 0$، گوییم b بر a بخش‌پذیر است، اگر عددی مانند q وجود داشته باشد که $b=a.q$ در این حالت گوییم عدد a، عدد b را عاد می‌کند و می‌نویسیم $a\mid b$، که عدد a یکی از مقسوم‌علیه‌های عدد b است، بنابراین داریم:

$$a\mid b \Leftrightarrow b=a.q$$

نکته:

۱) $a\mid a$

۲) $a\mid b \Rightarrow a\mid mb$

۳) $a\mid b \Rightarrow a^n\mid b^n$

۲۴ / ۳ اگر $d=(9n-2,5n+1)$ باشد، باید $d\neq 1$ باشد:

$$\begin{cases}d\mid 5n+1 \Rightarrow d\mid 45n+9\\ d\mid 9n-2 \Rightarrow d\mid -45n+10\end{cases} \Rightarrow d\mid 45n+9-45n+10$$

$$\Rightarrow d\mid 19 \xrightarrow{d\in\mathbb{N}} \begin{cases}d=1 \text{ غ ق ق}\\ d=19\end{cases}$$

پس داریم:

$$\begin{cases}19\mid 5n+1 \Rightarrow 19\mid 20n+4\\ 19\mid 19 \Rightarrow 19\mid -19n\end{cases} \Rightarrow 19\mid 20n+4-19n$$

$$\Rightarrow 19\mid n+4 \Rightarrow n+4=19k \Rightarrow n=19k-4$$

$$n\ge 100 \Rightarrow 19k-4\ge 100 \Rightarrow k\ge \frac{104}{19} \xrightarrow{k\in\mathbb{N}} k\ge 6$$

پس $n=19(6)-4=110$ که مجموع ارقام این عدد برابر ۲ است.

درسنامه

هرگاه ب.م.م دو عدد صحیح a و b برابر یک باشد $(a,b)=1$، می‌گوییم این دو عدد نسبت به هم اول هستند.

۲۵ / ۱

$$\begin{cases}70-75k\mid k^2 \Rightarrow -5(15k-14)\mid k^2 \Rightarrow 15k-14\mid k^2\\ k^2\mid 15k-14\end{cases}$$

$$\Rightarrow |k^2|=|15k-14|$$

حالت اول: $k^2=15k-14 \Rightarrow k^2-15k+14=0$

$$\Rightarrow (k-1)(k-14)=0 \Rightarrow \begin{cases}k=1\\ k=14\end{cases}$$

$k=1 \Rightarrow 70-75\mid 1 \Rightarrow -5\mid 1$ غ ق ق

$k=14 \Rightarrow 70-75(14)\mid 14^2 \Rightarrow -980\mid 196$ غ ق ق

حالت دوم: $k^2=-15k+14 \Rightarrow k^2+15k-14=0$

$\Delta=225+56=281 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{281}$

یعنی معادله جواب طبیعی ندارد، پس k یافت نمی‌شود.

درسنامه

نکته: اگر $a\mid b$ و $b\mid a$ آن‌گاه $a=\pm b$

۲۶ / ۲ اگر $d=(17!+2,18!+8)$ باشد، چون هر دو عدد $17!+2$ و $18!+8$ زوج هستند پس d حتماً زوج است.

$$\begin{cases}d\mid 18!+8 \xrightarrow{\times(-1)} d\mid -18!-8\\ d\mid 17!+2 \xrightarrow{\times 18} d\mid 18!+36\end{cases} \Rightarrow d\mid 18!+36-18!-8 \Rightarrow d\mid 28$$

و چون d زوج است پس $d=\{2,4,28\}$ اما عدد $17!+2$ مضرب ۴ و ۲۸ نیست بنابراین $d=2$

درسنامه

• **بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.م):**

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b را با $(a,b)=d$ نشان می‌دهیم، که دارای دو شرط زیر است:

۱) $d\mid a, d\mid b$

۲) اگر عددی مثل m وجود داشته باشد که $m\mid b$ و $m\mid a$، آن‌گاه $m\le d$.

۲۷ / ۴

$$p+64=a^3 \Rightarrow p=a^3-64 \Rightarrow p=(a-4)(a^2+4a+16)$$

چون p یک عدد اول است، پس فقط بر اعداد ۱ و p بخش‌پذیر است و می‌دانیم $a^2+4a+16>1$ است. پس $a-4=1 \Rightarrow a=5$ بنابراین:

$$p=a^2+4a+16 \xrightarrow{a=5} p=25+20+16 \Rightarrow p=61$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

عدد $\frac{p-1}{5}$ برابر ۱۲ است که باقی‌مانده تقسیم آن بر ۸ برابر عدد ۴ است.

درسنامه

عدد اول p دارای ۲ مقسوم‌علیه طبیعی ۱ و p است، بنابراین اگر $a>0$ باشد و $a|p$ آن‌گاه $a=1$ یا $a=p$

یادآوری:

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

۲۸ | ۳ اگر n عددی فرد باشد $a+b|a^n+b^n$، پس داریم:

$$\begin{cases}27+1|27^n+1^n\Rightarrow 28|27^n+1^n\\ 7|28\end{cases}\Rightarrow 7|27^n+1^n$$

بنابراین کافی است که n عدد فرد باشد.

درسنامه

نکته: اگر a و b اعداد صحیح و $\frac{n}{k}$ یک عدد طبیعی باشد، داریم:

$a^k-b^k|a^n-b^n$.

نکته: اگر a و b اعداد صحیح و $\frac{n}{k}$ یک عدد طبیعی زوج باشد، داریم:

$a^k+b^k|a^n-b^n$

نکته: اگر a و b اعداد صحیح و $\frac{n}{k}$ یک عدد طبیعی فرد باشند، داریم:

$a^k+b^k|a^n+b^n$

۲۹ | ۳ عدد a مضرب ۱۳ و عدد a^2 مضرب ۱۴۰ است.

$$\begin{cases}140|a^2\to 2^2\times5\times7|a^2\Rightarrow 2\times5\times7|a\\ 13|a\end{cases}$$

$$\Rightarrow [2\times5\times7,13]|a\Rightarrow 910|a$$

$$\Rightarrow a=910k$$

$$1000\le a<10000\Rightarrow 1000\le 910k<10000\Rightarrow 1/09\le k<10/98$$

$$k\in\{2,3,\dots,10\}$$

بنابراین ۹ عدد وجود دارد.

درسنامه

نکته: اگر $a|c$ و $b|c$، آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت $[a,b]|c$.

۳۰ | ۱ اگر $(a,b)=d$، داریم:

$$\begin{cases}d|a\\ d|b\end{cases}\Rightarrow d^2|ab\Rightarrow d^2|2730$$

با توجه به این‌که $2730=2\times3\times5\times7\times13$ است پس عدد ۲۷۳۰ بر مربع هیچ عدد طبیعی غیر از یک بخش‌پذیر نیست پس $d=1$ است.

درسنامه

$(a|b\wedge c|d)\Rightarrow ac|bd$

۳۱ | ۲

$$(A-B)\cup(B\cup A')=(A\cap B')\cup(B\cup A')$$
$$=[A\cup(B\cup A')]\cap[B'\cup(B\cup A')]$$
$$=[(A\cup A')\cup B]\cap[(B'\cup B)\cup A']=U\cap U=U$$

مجموعه مرجع اگر دارای n عضو باشد:

$$\binom{n}{2}=36\Rightarrow\frac{n(n-1)}{2}=36\Rightarrow n(n-1)=72\Rightarrow n=9$$

$$(A\Delta B)-B=[(A-B)\cup(B-A)]-B=A-B$$

مجموعهٔ $(A-B)$ دارای ۴ عضو بوده که ۱۵ زیرمجموعهٔ غیرتهی دارد.

$$n(A)=n(A-B)+n(A\cap B)=4+1=5$$
$$n(A')=n(S)-n(A)=9-5=4$$

مجموعهٔ A'، $2^{4-1}=8$ زیرمجموعه با تعداد عضو فرد دارد.

درسنامه

هر مجموعهٔ n عضوی 2^n زیرمجموعه دارد که (2^n-1) از این زیرمجموعه‌ها غیرتهی هستند و نصف این مجموعه‌ها یعنی 2^{n-1} زیرمجموعه تعداد عضوهای فرد دارند و نصف دیگر این مجموعه‌ها تعداد عضوشان زوج است و تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی یک مجموعهٔ nعضوی برابر $\binom{n}{k}$ است.

۳۲ | ۱

چون از مجموعهٔ A هر عضوی برداشته شود و به مجموعهٔ B اضافه شود تعداد عضوهای B تغییری نمی‌کند پس $A\subseteq B$ است و چون $A-B=B\cap C$ است. پس $B\cap C=\varnothing$ است؛ بنابراین $A\cap C=\varnothing$.

$$(A\Delta C)\cap B=[(A\cup C)-\underbrace{(A\cap C)}_{\varnothing}]\cap B=[A\cup C]\cap B$$
$$=(A\cap B)\cup(B\cap C)=A\cup\varnothing=A$$

درسنامه

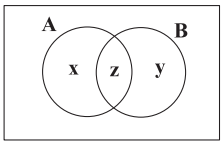
$A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

۳۳ | ۲ اگر $|A-B|=x$ و $|B-A|=y$ و $|A\cap B|=z$ باشد، داریم:

$$|B-A|\times|A-B|=216\Rightarrow xy=216=P$$



$$|A\Delta B|=30\Rightarrow x+y=30=S$$

$$t^2-St+P=0\Rightarrow t^2-30t+216=0$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

$\Rightarrow (t-۱۸)(t-۱۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۱۲ \\ t=۱۸ \end{cases}$

فرض کنیم $|A-B|=۱۲$ و $|B-A|=۱۸$ باشد و $|A\cup B|=k$ باشد:

$$\binom{k}{۰}+\binom{k}{۱}=۴۱ \Rightarrow ۱+k=۴۱ \Rightarrow k=۴۰ \Rightarrow x+y+z=۴۰$$

$$\Rightarrow ۱۲+۱۸+z=۴۰ \Rightarrow z=۱۰$$

یعنی $|A|=۲۲$ و $|B|=۲۸$ و $|A\cap B|=۱۰$ است. حال اگر ۷ عضو از A و B حذف شود $|A|=۱۵$ و $|B|=۲۱$ و $|A\cap B|=۷$ می‌شود که:

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=۱۵+۲۱-۷=۲۹$$

درسنامه

یادآوری: اگر مجموع دو عدد S و حاصل‌ضرب آن‌ها P باشد آن دو عدد ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-Sx+P=۰$ هستند.

یادآوری: اگر تعداد عضوهای مجموعه‌های A و B و $A\cap B$ را با $|A|$ و $|B|$ و $|A\cap B|$ نشان دهیم، آن‌گاه:

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

نکته: اگر مجموعهٔ A دارای n عضو و مجموعهٔ B دارای m عضو باشد، حاصل‌ضرب دکارتی $A\times B$ دارای $n\times m$ عضو است.

۳۴ **۱** چون A و B غیرتهی هستند و $A\times B=B\times A$ است، پس $A=B$ است و چون مجموعهٔ A دو عضو دارد پس مجموعهٔ B هم باید دو عضو باشد. بنابراین باید:

$$\begin{cases} x^۲-۱=-۹ \Rightarrow x^۲=-۸ \text{ غ ق ق} \\ x^۲-۱=۴x-۵ \Rightarrow x^۲-۴x+۴=۰ \Rightarrow (x-۲)^۲=۰ \Rightarrow x=۲ \\ ۴x-۵=-۹ \Rightarrow ۴x=-۴ \Rightarrow x=-۱ \end{cases}$$

با فرض $x=۲$، $B=\{۳,-۹\}$ که داریم:

$$a^۲+۲=۳ \Rightarrow a^۲=۱ \Rightarrow a=\pm ۱ \ , \ b+۱=-۹ \Rightarrow b=-۱۰$$

با فرض $x=-۱$، $B=\{۰,-۹\}$ که داریم:

$$a^۲+۲=۰ \Rightarrow a^۲=-۲ \text{ غ ق ق}$$

$$a^۲+۲=-۹ \Rightarrow a^۲=-۱۱ \text{ غ ق ق}$$

$$\frac{\max(a-b)}{\min(a-b)}=\frac{۱+۱۰}{-۱+۱۰}=\frac{۱۱}{۹}$$

درسنامه

ضرب دکارتی: حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعهٔ A و B را با $A\times B$ نشان می‌دهیم و این حاصل‌ضرب شامل همهٔ زوج مرتب‌هایی است که مؤلفه‌های اول آن‌ها متعلق به مجموعهٔ A و مؤلفه‌های دوم متعلق به مجموعهٔ B است. در حالت کلی $A\times B\neq B\times A$، یعنی حاصل‌ضرب دکارتی خاصیت جابه‌جایی ندارد، اما:

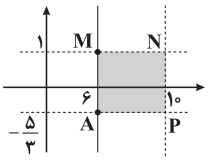
$$A\times B=B\times A \Rightarrow (A=B)\vee(A=\varnothing)\vee(B=\varnothing)$$

۳۵ **۱**

$$\frac{۷}{۳}\le[\frac{x}{۲}]\le\frac{۹}{۲} \Rightarrow \begin{cases} [\frac{x}{۲}]=۳ \Rightarrow ۳\le\frac{x}{۲}<۴ \Rightarrow ۶\le x<۸ \\ [\frac{x}{۲}]=۴ \Rightarrow ۴\le\frac{x}{۲}<۵ \Rightarrow ۸\le x<۱۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۶\le x<۱۰$$

$$|۳x+۱|<۴ \Rightarrow -۴<۳x+۱<۴ \Rightarrow -۵<۳x<۳ \Rightarrow -\frac{۵}{۳}<x<۱$$



$$MN=۱۰-۶=۴$$

$$NP=۱+\frac{۵}{۳}=\frac{۸}{۳}$$

رنگی $S=۴\times\frac{۸}{۳}=\frac{۳۲}{۳}$

درسنامه

اگر حداقل یکی از مجموعه‌های A و B بازه‌ای پیوسته از اعداد حقیقی باشند، آن‌گاه $A\times B$ شامل بی‌نهایت نقطه خواهد بود که برای نشان دادن این حاصل‌ضرب از نمودار هندسی استفاده می‌کنیم که روی محور x مجموعهٔ A و روی محور y مجموعهٔ B را نشان می‌دهیم.

۳۶ **۳**

$$n(S)=\underset{\text{دانش‌آموز اول}}{۳}\times ۳\times ۳\times ۳\times \underset{\text{دانش‌آموز ۵ام}}{۳}=۲۴۳$$

متمم این پیشامد آن است که کسی در کلاس دهم ثبت نام نکند.

$$n(A')=۲\times ۲\times ۲\times ۲\times ۲=۳۲$$

$$P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{۳۲}{۲۴۳}$$

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۳۲}{۲۴۳}=\frac{۲۱۱}{۲۴۳}$$

درسنامه

محاسبهٔ احتمال: برای این‌که احتمال پیشامد A را محاسبه کنیم، کافی است تعداد اعضای پیشامد A را بر تعداد اعضای فضای نمونه‌ای تقسیم کنیم که عدد حاصل، احتمال A است و آن را باید با $P(A)$ نمایش می‌دهیم.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

واضح است که $۰\le P(A)\le ۱$ است و اگر $P(A)=۰$ باشد، A را پیشامد محال (نشدنی) و اگر $P(A)=۱$ باشد، A را پیشامد حتمی می‌گوییم.

احتمال این‌که پیشامد A رخ ندهد: $P(A')=۱-P(A)$

۳۷ **۳**

$$n(S)=\binom{۹}{۳}=۸۴$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

اگر به روش کدگذاری بخواهیم ۳ عضو را انتخاب کنیم ۶ عدد صفر و ۳ عدد ۱ داریم که اعداد صفر را چیدمان می‌کنیم ۷ فضا بین آن‌ها وجود دارد که باید ۳ فضای آن انتخاب شود. پس:

$$n(A)=\binom{۷}{۳}=۳۵$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳۵}{۸۴}=\frac{۵}{۱۲}$$

درسنامه

روش کدگذاری: اگر فرض کنیم $A=\{۱,۲,۳\}$ باشد، چون A دارای ۳ عضو است، پس ۸ زیرمجموعه دارد که با ارقام صفر و ۱ می‌توانیم تمام زیرمجموعه‌های A را مشخص کنیم مثلاً $B=\{۱,۳\}$ که $B\subset A$ است با کد «۱۰۱» مشخص می‌شود چون $۱,۳\in B$ و $۲\notin B$ با کد صفر مشخص می‌شوند و به همین ترتیب $C=\{۳\}$ که $C\subset A$ است که با کد «۰۰۱» مشخص می‌شود.

۳۸ **۳** اگر تعداد خانم‌ها x فرض شود:

$$\text{تعداد مردان}=x+\frac{۲۵}{۱۰۰}x=\frac{۵}{۴}x$$

پس تعداد کل نفرات برابر $\frac{۹}{۴}x$ است.

$$n(S)=\binom{\frac{۹}{۴}x}{۲}=\frac{\frac{۹}{۴}x(\frac{۹}{۴}x-۱)}{۲}$$

$$n(A)=\binom{x}{۱}\binom{\frac{۵}{۴}x}{۱}=\frac{۵}{۴}x^{۲}$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}\Rightarrow\frac{۵۰}{۹۹}=\frac{\frac{۵}{۴}x^{۲}}{\frac{۱}{۲}\times\frac{۹}{۴}x(\frac{۹}{۴}x-۱)}\Rightarrow\frac{۵۰}{۹۹}=\frac{۱۰x}{۹(\frac{۹}{۴}x-۱)}$$

$$\Rightarrow\frac{۵}{۱۱}=\frac{x}{\frac{۹}{۴}x-۱}\Rightarrow۱۱x=\frac{۴۵}{۴}x-۵\Rightarrow۵=\frac{۱}{۴}x\Rightarrow x=۲۰$$

$$\text{تعداد ساکنین}=\frac{۹}{۴}(۲۰)=۴۵$$

۳۹ **۴**

$$S=\{\underbrace{۱۰,۱۱,\dots,۱۹}_{x},\underbrace{۲۰,\dots,۲۹}_{۲x},\underbrace{۳۰,\dots,۳۹}_{۳x},\underbrace{۴۰,\dots۴۹}_{۴x}\}$$

$$n(S)=۱۰(x+۲x+۳x+۴x)=۱۰۰x$$

اعداد اول $A=\{\underbrace{۱۱,۱۳,۱۷,۱۹}_{x},\underbrace{۲۳,۲۹}_{۲x},\underbrace{۳۱,۳۷}_{۳x},\underbrace{۴۱,۴۳\,۴۷}_{۴x}\}$

$$n(A)=۴(x)+۲(۲x)+۲(۳x)+۳(۴x)=۴x+۴x+۶x+۱۲x=۲۶x$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲۶x}{۱۰۰x}=۰/۲۶$$

درسنامه

هرگاه حداقل دو پیشامد سادهٔ تک‌عضوی از یک فضای نمونه‌ای، احتمال نابرابر داشته باشند، S را فضای نمونه‌ای غیرهم‌شانس می‌نامیم.

در حل مسائل مربوط به احتمال غیرهم‌شانس، احتمال یکی از برآمدهای فضای نمونه‌ای را برابر x فرض می‌کنیم و احتمال سایر برآمدها را برحسب x به دست می‌آوریم و سپس مجموع همهٔ احتمال‌ها را برابر ۱ قرار می‌دهیم، دقت کنید احتمال هر برآمد، عددی در بازهٔ $[۰,۱]$ است و اگر $A=\{a_۱,a_۲,\dots,a_k\}$ یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد، آن‌گاه برای محاسبهٔ احتمال رخداد پیشامد A باید به صورت زیر عمل کنیم.

$$P(A)=P(a_۱)+P(a_۲)+P(a_۳)+\dots+P(a_k)$$

۴۰ **۴** اگر احتمال رو شدن عدد فرد x باشد داریم:

i	۱	۲	۳	۴	۵	۶
P(i)	x	nx	x	nx	x	nx

$$P(\text{اول})=\frac{۳}{۸}\Rightarrow P(۲)+P(۳)+P(۵)=\frac{۳}{۸}\Rightarrow(n+۲)x=\frac{۳}{۸}\quad(۱)$$

$$P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱$$

$$\Rightarrow(۳n+۳)x=۱\quad(۲)$$

رابطهٔ (۱) را به رابطهٔ (۲) تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{(n+۲)x}{(۳n+۳)x}=\frac{۳}{۸}\Rightarrow۸n+۱۶=۹n+۹\Rightarrow n=۷$$

$$P(۶)=\frac{nx}{(۳n+۳)x}=\frac{۷}{۲۴}$$

۴۱ **۱**

$$(x^{۲}+۶x)+(y^{۲}-۱۰y)+(z^{۲}+۱۴z)=-۸۳$$

$$\Rightarrow(x+۳)^{۲}+(y-۵)^{۲}+(z+۷)^{۲}=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۳\\y=۵\\z=-۷\end{cases}$$

$$\Rightarrow x+y-z=۹$$

درسنامه

اتحاد مربع دوجمله‌ای:

۱) $(a+b)^{۲}=a^{۲}+۲ab+b^{۲}$

۲) $(a-b)^{۲}=a^{۲}-۲ab+b^{۲}$

نکته: $a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}=۰\Rightarrow a=b=c=۰$

۴۲ **۲**

$$x^{۲}=(۲+\sqrt{۳})^{۲}=۴+۳+۴\sqrt{۳}=۷+۴\sqrt{۳}$$

$$x^{۳}=(۲+\sqrt{۳})^{۳}=۸+۳(۴)(\sqrt{۳})+۳(۲)(\sqrt{۳})^{۲}+(\sqrt{۳})^{۳}$$

$$=۲۶+۱۵\sqrt{۳}$$

$$x^{۲}+x^{۳}-۱۹\sqrt{۳}=(۷+۴\sqrt{۳})+(۲۶+۱۵\sqrt{۳})-۱۹\sqrt{۳}=۳۳$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

درسنامه

اتحادهای جبری:

اتحادهای اصلی به شرح زیر است:

۱) $(a+b)^۲=a^۲+۲ab+b^۲$ (اتحاد مربع دوجمله‌ای)

۲) $(a-b)^۲=a^۲-۲ab+b^۲$

۳) $(a-b)(a+b)=a^۲-b^۲$ (اتحاد مزدوج)

۴) $(a+b+c)^۲=a^۲+b^۲+c^۲+۲(ab+ac+bc)$ (اتحاد مربع سه‌جمله‌ای)

۵) $(x+a)(x+b)=x^۲+(a+b)x+ab$ (اتحاد جملهٔ مشترک)

۶) $(a+b)^۳=a^۳+۳a^۲b+۳ab^۲+b^۳$ (اتحاد مکعب دوجمله‌ای)

۷) $(a-b)^۳=a^۳-۳a^۲b+۳ab^۲-b^۳$

۸) $(a-b)(a^۲+ab+b^۲)=a^۳-b^۳$ (اتحاد چاق و لاغر)

۹) $(a+b)(a^۲-ab+b^۲)=a^۳+b^۳$

۴۳ **۱** با فرض $A=\sqrt[۳]{\sqrt۲+۱}$ آن‌گاه $\frac{۱}{A}=\sqrt[۳]{\sqrt۲-۱}$ خواهد شد.

$$B=\frac{۱}{۱+A}+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{A}}=\frac{۱}{۱+A}+\frac{A}{A+۱}=\frac{۱+A}{۱+A}=۱$$

درسنامه

گویا کردن مخرج‌های گنگ:

حالت اول: اگر مخرج کسر فقط یک رادیکال تنها باشد:

در این حالت اگر فرجهٔ رادیکال ۲ باشد باید صورت و مخرج کسر را در خود رادیکال ضرب کنیم و اگر فرجهٔ رادیکال بیش‌تر از ۲ باشد صورت و مخرج کسر را در رادیکال با همان فرجه و در توانی ضرب می‌کنیم که عبارت زیر رادیکال از رادیکال خارج شود.

$$\begin{cases}\frac{۱}{\sqrt a}\times\frac{\sqrt a}{\sqrt a}=\frac{\sqrt a}{a}\\ \frac{۱}{\sqrt[n]{a^m}}\times\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^n}}=\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}\end{cases}\quad(a>۰,\ n>m)$$

حالت دوم: مخرج کسر شامل دو رادیکال با فرجهٔ ۲ با یک رادیکال با فرجهٔ ۲ و یک عدد باشد.

صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

حالت سوم: عبارت مخرج شامل عبارت چاق یا لاغر اتحاد چاق و لاغر باشد.

صورت و مخرج کسر را در عبارت چاق یا عبارت لاغر اتحاد چاق و لاغر ضرب می‌کنیم.

۴۴ **۱**

$$\frac{۱}{x^۲+۱}+\frac{۱}{x^۲-۱}=۲\Rightarrow\frac{(x^۲-۱)+(x^۲+۱)}{(x^۲+۱)(x^۲-۱)}=۲\Rightarrow\frac{۲x^۲}{x^۴-۱}=۲$$

$$\Rightarrow x^۴-۱=x^۲\Rightarrow x^۴=x^۲+۱$$

$$\left(\frac{۱}{x^۲+۱+x}+\frac{۱}{x^۲+۱-x}\right)^{۱۴۰۶}=\left(\frac{x^۲+۱-x+x^۲+۱+x}{(x^۲+۱+x)(x^۲+۱-x)}\right)^{۱۴۰۶}$$

$$=\left(\frac{۲(x^۲+۱)}{(x^۲+۱)^۲-x^۲}\right)^{۱۴۰۶}=\left(\frac{۲(x^۲+۱)}{x^۴+۱+x^۲}\right)^{۱۴۰۶}$$

با استفاده از فرض $\left(\frac{۲x^۴}{x^۴+x^۴}\right)^{۱۴۰۶}=۱$

۴۵ **۴**

$$\begin{cases}\sqrt{x^۳+y+۵}-\sqrt{x^۳+y-۱۰}=۵\\ \sqrt{x^۳+y+۵}+\sqrt{x^۳+y-۱۰}=A\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\times}(\sqrt{x^۳+y+۵}-\sqrt{x^۳+y-۱۰})(\sqrt{x^۳+y+۵}+\sqrt{x^۳+y-۱۰})$$

$$=۵\times A\Rightarrow x^۳+y+۵-(x^۳+y-۱۰)=۵A\Rightarrow A=۳$$

۴۶ **۱**

$$a=\sqrt{۴+\sqrt۷}-\sqrt{۴-\sqrt۷}$$

$$\Rightarrow a^۲=۴+\sqrt۷+۴-\sqrt۷-۲\sqrt{۱۶-۷}$$

$$\Rightarrow a^۲=۸-۶=۲\Rightarrow a=\sqrt۲$$

$$\sqrt{a^۳+a^۲+۱}=\sqrt{۲\sqrt۲+۲+۱}=\sqrt{۳+۲\sqrt۲}$$

$$=\sqrt{(\sqrt۲+۱)^۲}=\sqrt۲+۱=a+۱$$

۴۷ **۴** اگر طرفین دو رابطهٔ داده‌شده را به توان دو برسانیم و سپس طرفین را جمع کنیم، جواب مسئله به دست می‌آید.

$$\begin{cases}(\sin x+۲\cos x)^۲=A^۲\\ (\cos x-۲\sin x)^۲=B^۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin^۲x+۴\cos^۲x+۴\sin x\cos x=A^۲\\ \cos^۲x+۴\sin^۲x-۴\sin x\cos x=B^۲\end{cases}$$

$$\xrightarrow{+}۵(\underbrace{\sin^۲x+\cos^۲x}_{۱})=A^۲+B^۲\Rightarrow A^۲+B^۲=۵$$

۴۸ **۱**

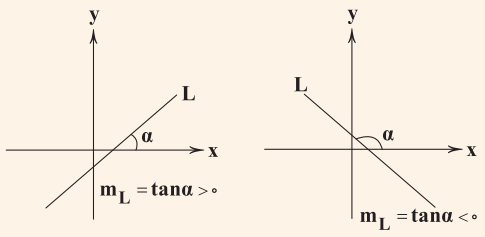
$$\tan ۱۳۵^\circ=\frac{۳b-۰}{b-۵}\Rightarrow\frac{۳b}{b-۵}=-۱\Rightarrow ۳b=۵-b$$

$$\Rightarrow ۴b=۵\Rightarrow b=\frac{۵}{۴}$$

درسنامه

شیب خط و تانژانت:

اگر خط L با شیب m محور xها را قطع کند، آن‌گاه تانژانت زاویه بین این خط با جهت مثبت محور xها برابر شیب خط L است.



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۹ **۱**

$$۴\sin\alpha+\cos\alpha=۱\Rightarrow ۴\sin\alpha=۱-\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{۱-\cos\alpha}=\frac{۱}{۴}$$

$$\frac{\tan\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha\tan\alpha}=\frac{\tan\alpha(۱+\cos\alpha)}{\sin\alpha\tan\alpha}=\frac{۱+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{۱-\cos\alpha}=\frac{۱}{۴}$$

درسنامه

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی:

۱) $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$

۲) $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(\cos\alpha\neq ۰)$

۳) $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}(\sin\alpha\neq ۰)$

۴) $\tan\alpha\cot\alpha=۱(\sin\alpha,\cos\alpha\neq ۰)$

۵) $۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}(\cos\alpha\neq ۰)$

۶) $۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}(\sin\alpha\neq ۰)$

۵۰ **۲** با فرض $\tan x=A$ معادله را حل می‌کنیم:

$$A^۳+A^۲-۵A-۲=۰\Rightarrow (A-۲)(A^۲+۳A+۱)=۰$$

$$\Rightarrow A=۲\,,\ A=\frac{-۳\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

چون x در ناحیهٔ سوم است، پس $\tan x>۰$ است در واقع $A>۰$ است پس $A=۲$ قابل قبول است.

$$\tan x=۲\Rightarrow \tan^۲ x=۴\Rightarrow ۱+\tan^۲ x=۵$$

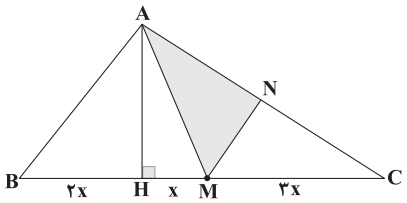
$$\Rightarrow \frac{۱}{\cos^۲ x}=۵\Rightarrow \cos^۲ x=\frac{۱}{۵}=۰/۲$$

۵۱ **۱** مثلث‌های AHC و AMC هم ارتفاع هستند.

$$S_{AHC}=\frac{۴}{۳}S_{AMC}$$

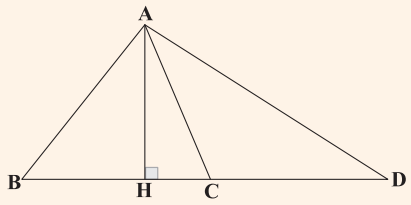
از طرفی مساحت مثلث MNC و AMN با هم برابرند. پس:

$$S_{AHC}=\frac{۴}{۳}\times ۲S_{AMN}=\frac{۸}{۳}S_{AMN}$$



درسنامه

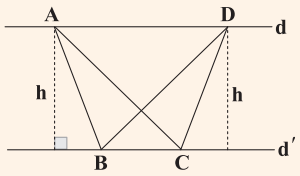
نکته: هرگاه اندازهٔ ارتفاع‌های دو مثلث با هم برابر باشند، آن‌گاه نسبت مساحت‌های دو مثلث با نسبت قاعده‌های آن‌ها برابرند. در شکل زیر AH ارتفاعی برای هر سه مثلث ABC، ABD و ACD می‌باشد و نتایج زیر حاصل می‌شود:



$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}}=\frac{BD}{BC}\,,\ \frac{S_{ACD}}{S_{ABC}}=\frac{DC}{BC}\,,\ \ldots$$

نکته: در شکل زیر دو خط d و d′ موازی‌اند. پس فاصلهٔ آن‌ها ثابت است (h). ضمناً در دو مثلث ABC و DBC قاعده‌ها یکسان و برابر BC است. پس مساحت‌های دو مثلث ABC و DBC برابرند.

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta DBC}$$

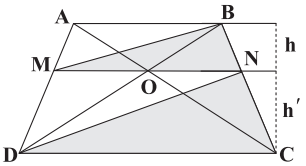


۵۲ **۲**

$$\frac{۲}{MN}=\frac{۱}{AB}+\frac{۱}{DC}=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow MN=۶$$

قطرهای ذوزنقه را رسم می‌کنیم.

بنابراین:



دو مثلث OAB و OCD متشابهند. پس:

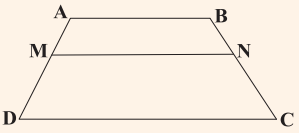
$$\frac{h'}{h}=\frac{۱۲}{۴}=۳$$

$$\frac{S_{DMNC}}{S_{ABNM}}=\frac{\frac{h'}{۲}(MN+DC)}{\frac{h}{۲}(MN+AB)}=\frac{h'(۶+۱۲)}{h(۶+۴)}=\frac{۳\times ۱۸}{۱۰}=۵/۴$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

درسنامه

نکته: تالس در ذوزنقه: در ذوزنقهٔ ABCD پاره‌خط‌های MN و DC موازی‌اند. در این صورت: $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$ و هم‌چنین اگر MN موازی AB و DC باشد $MN=\frac{MD\times AB+AM\times DC}{AM+MD}$. ضمناً اگر N و M وسط ساق‌ها باشد، آن‌گاه:

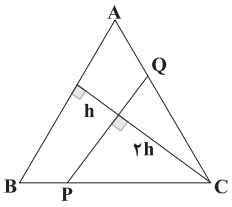


$$MN=\frac{AB+DC}{2}$$

۵۳ **۳** در مثلث متساوی‌الاضلاع میانه و ارتفاع با هم برابرند و به نسبت ۱ و ۲ یک‌دیگر را قطع می‌کنند. بنابراین نسبت‌ها به صورت زیر خواهد بود:

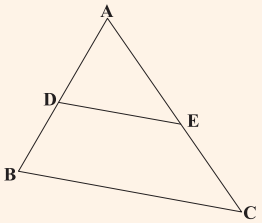
$$\frac{AB}{QP}=\frac{3}{2}=\frac{3x}{2x}\Rightarrow\begin{cases}AB=3x\\QP=2x\end{cases}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABPQ}}=\frac{\frac{1}{2}\times 3h\times 3x}{\frac{1}{2}\times 5x\times h}=\frac{9}{5}=1/8$$



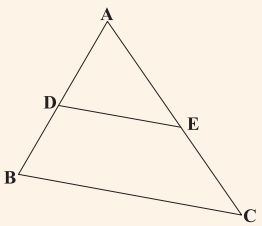
درسنامه

قضیهٔ تالس: اگر در مثلث ABC خط DE را موازی قاعدهٔ BC رسم کنیم، در این صورت داریم:



$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

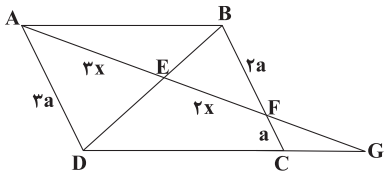
تعمیم قضیهٔ تالس: در ادامهٔ توضیحات قضیهٔ تالس رابطهٔ کلی‌تر در مورد نسبت اضلاع به صورت است:



$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

۵۴ **۴**

$$\overset{\Delta}{ADE}\sim\overset{\Delta}{EFB}\Rightarrow\frac{AD}{BF}=\frac{3}{2}\Rightarrow\begin{cases}AD=3a\\BF=2a\end{cases}\Rightarrow FC=a$$



$$\overset{\Delta}{ADG}:FC\|AD\xrightarrow{\text{تعمیم تالس}}\frac{FG}{AG}=\frac{FC}{AD}=\frac{1}{3}$$

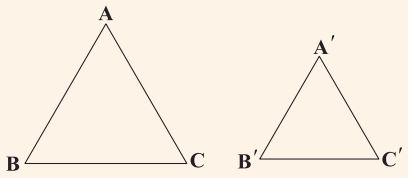
$$\Rightarrow\frac{FG}{5x+FG}=\frac{1}{3}\Rightarrow 3FG=5x+FG\Rightarrow FG=\frac{5}{2}x$$

$$\frac{FG}{AF}+\frac{FC}{AD}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

درسنامه

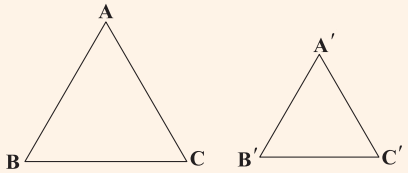
حالت‌های تشابه دو مثلث:

۱



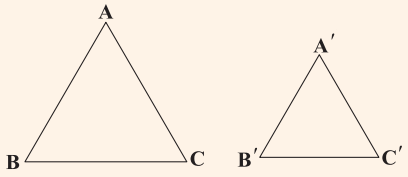
$$\begin{cases}\hat{A}=\hat{A}'\\\hat{B}=\hat{B}'\end{cases}\Rightarrow\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{A'B'C'}$$

۲ اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویهٔ بین آن‌ها برابر باشد، آن‌گاه دو مثلث متشابه‌اند.



$$\begin{cases}\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}\\\hat{A}=\hat{A}'\end{cases}\Rightarrow\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{A'B'C'}$$

۳ اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشد، آن‌گاه دو مثلث متشابهند.



$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}\Rightarrow\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{A'B'C'}$$

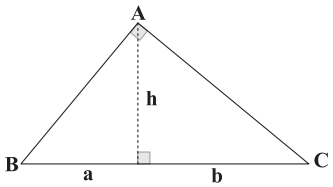
نکته: در نوشتن نسبت تشابه دقت کنید که اضلاع روبه‌رو به زوایای مساوی در یک نسبت به هم تقسیم کنید.

به عنوان مثال:

$$\overset{\Delta}{AFC},\overset{\Delta}{EDM}:\begin{cases}\hat{A}=\hat{D}\\\hat{C}=\hat{M}\end{cases}\Rightarrow\frac{AF}{ED}=\frac{AC}{DM}=\frac{FC}{EM}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۵ ۲



$$\begin{cases} h^2 = ab \\ h = ab \end{cases} \xrightarrow{\div} h = 1$$

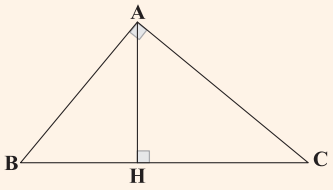
$$\frac{a+b}{2} = 8 \Rightarrow a+b = 16$$

$$S_{ABC} = \frac{h(a+b)}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

درسنامه

روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه:

مثلث ABC که در رأس A قائمه است را بـه همـراه ارتفـاع AH در نظر بگیرید. در این مثلث روابط و نتایج زیر برقرار است:



$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

۱ رابطهٔ فیثاغورس:

۲ سه مثلث ABH، ABC و AHC با هم متشابهند.

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{ABH} \sim \overset{\Delta}{AHC}$$

۳ واسطه‌های هندسی (نتایج تشابه)

$$AB^2 = BH \times BC \;,\; AC^2 = HC \times BC \;,\; AH^2 = BH \times HC$$

۴ نتیجهٔ مساحت $AB \times AC = AH \times BC = 2S_{\overset{\Delta}{ABC}}$

۵ نتیجهٔ زوایا:

الف) $\hat{C} = 30^\circ \Rightarrow AB = \frac{BC}{2}$

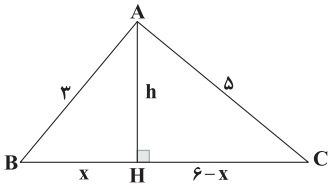
ب) $\hat{C} = 45^\circ \Rightarrow AB = AC = \frac{\sqrt{2}}{2}BC$

ج) $\hat{C} = 60^\circ \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$

د) $\hat{C} = 15^\circ \Rightarrow AH = \frac{1}{4}BC$

۵۶ ۲ ارتفاع AH را رسم می‌کنیم.

$$\overset{\Delta}{ABH}: h^2 + x^2 = 9$$

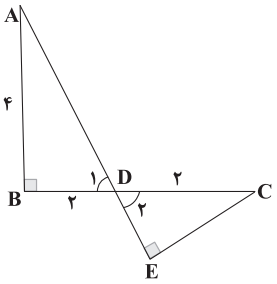


$$\overset{\Delta}{AHC}: h^2 + (6-x)^2 = 25 \Rightarrow h^2 + 36 - 12x + x^2 = 25$$

$$\xrightarrow{h^2+x^2=9} 9 + 36 - 12x = 25 \Rightarrow 12x = 45 - 25 = 20 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$h^2 = 9 - x^2 = 9 - \frac{25}{9} = \frac{81-25}{9} = \frac{56}{9} = 6/\overline{2} \Rightarrow h = \sqrt{6/\overline{2}}$$

۵۷ ۳

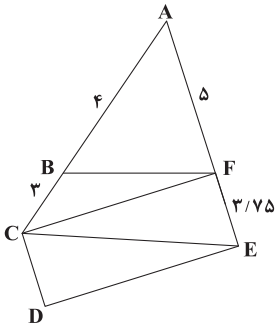


$$\overset{\Delta}{ABD}: AD = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$$

$$\begin{cases} \hat{D}_1 = \hat{D}_2 \\ \hat{B} = \hat{E} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABD} \sim \overset{\Delta}{DEC} \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{AB}{CE}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{5}}{2} = \frac{4}{CE} \Rightarrow CE = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

۵۸ ۴ قطر CE را رسم می‌کنیم.



در مثلث ACE چون $\frac{AB}{BC} = \frac{AF}{FE} = \frac{4}{3}$ است، پس BF||CE است. بنابراین طبق تعمیم تالس داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BF}{CE} = \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{CE}{BF} = \frac{7}{4}$$

قطرهای مستطیل با هم برابرند. پس:

$$\frac{DF}{BF} = \frac{7}{4} = 1/75$$

۵۹ ۳

$$FC = \frac{EF \times AB + AF \times ED}{AF + FE} \Rightarrow y = \frac{4p + 9p}{7} = \frac{13}{7}p \Rightarrow \frac{y}{p} = \frac{13}{7}$$

$$\frac{y+p}{y+3p} = \frac{\frac{y}{p}+1}{\frac{y}{p}+3} = \frac{\frac{13}{7}+1}{\frac{13}{7}+3} = \frac{20}{34} = \frac{10}{17}$$

۶۰ ۳ با فرض $EC = x$ داریم:

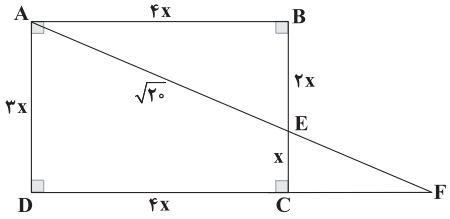
$$BE = 2x \;,\; AB = 4x$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

$\overset{\Delta}{ABE}: ۱۶x^۲ + ۴x^۲ = ۲۰ \Rightarrow x = ۱$

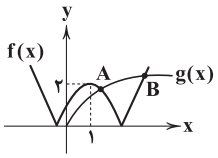
دو مثلث CEF و ABE متشابهند و نسبت تشابه ۲ است.

$\overset{\Delta}{EFC} = EC + CF + EF = ۱ + ۲ + \sqrt{۵} = ۳ + \sqrt{۵}$



۶۱ **۳** رأس سهمی $y = x^۲ - ۲x - ۱$ نقطهٔ $(۱, -۲)$ است.

نمودار $f(x)$ و $g(x)$ به صورت زیر خواهد بود.

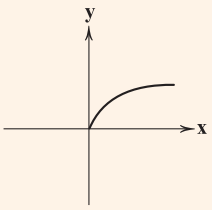


طبق نمودار، دو تابع f و g در دو نقطهٔ A و B متقاطع‌اند.

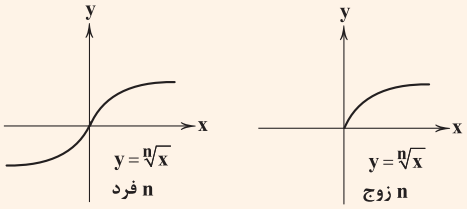
درسنامه

تابع رادیکالی و دامنهٔ آن:

تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را تابع رادیکالی می‌نامیم و نمودار آن به صورت زیر است:



در حالت کلی‌تر نمودار $\sqrt[n]{x}$ برای nهای زوج و فرد طبیعی به صورت زیر است.



۶۲ **۴**

$y^۲ + x^۲ + ۴x + ۴ = ۰ \Rightarrow (x+۲)^۲ + y^۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۲ \\ y = ۰ \end{cases}$

رابطه نمایش یک نقطه به مختصات $(-۲, ۰)$ است. سایر گزینه‌ها را می‌توانیم با عددگذاری حذف کنیم.

۱) $x = ۰ \Rightarrow y = \pm ۱$

۲) $x = -۱ \Rightarrow y = ۰, -۲$

۳) $x = ۰ \Rightarrow [y] = ۰ \Rightarrow ۰ \le y < ۱$

درسنامه

تشخیص تابع از روی ضابطه:

برای تشخیص تابع بودن یا نبودن از روی ضابطه، معمولاً از روش‌های زیر می‌توان استفاده کرد:

روش اول: از آن‌جایی که در تابع یک ورودی نباید دو یا چند خروجی متفاوت داشته باشد، بنابراین در تعریف تابع داریم:

$x_۱ = x_۲ \Rightarrow f(x_۱) = f(x_۲) (y_۱ = y_۲)$

از این تعریف می‌توان در اثبات تابع بودن بعضی توابع استفاده کرد.

روش دوم: اگر در رابطهٔ داده شده بتوانیم متغیر y را بر حسب x تنها کنیم و به ازای هر x در دامنه، دقیقاً یک مقدار y به دست آید، رابطهٔ قطعاً تابع است.

تذکر: اگر در هنگام تنها کردن y، علامت $\pm$ ایجاد شود، معمولاً رابطه تابع نیست مگر در حالت خاصی که عبارت جلوی $\pm$ تنها برابر صفر شود.

تذکر: جمع دو یا چند مقدار نامنفی تنها زمانی برابر صفر است که همهٔ عبارات همزمان برابر باشند.

نکته: بهترین روش برای اثبات تابع نبودن رابطه‌ها استفاده از مثال نقض است، یعنی بتوان عددی به عنوان ورودی به جای x وارد رابطه کرد که به‌ازای آن بیش از یک مقدار برای y به دست آید.

به نظر می‌آید که بیش‌تر مواقعی که رابطه‌ای تابع نیست، رابطه در شرایط زیر قرار دارد:

۱) متغیر y توان زوج داشته باشد $(x^۲ + y^۲ = ۵)$

۲) متغیر y داخل قدرمطلق باشد $(x^۳ + |y| = ۵)$

۳) متغیر y داخل براکت باشد $(۳x + [y] = ۷)$

۴) متغیر y به عنوان زاویه داخل یک نسبت مثلثاتی قرار داشته باشد $(x = \sin y)$

ولی در **این** موارد حواسمان حتماً باید به موارد خاص باشد یعنی ممکن است موارد فوق برقرار باشد و رابطه هم‌چنان تابع باشد.

۶۳ **۲**

$\frac{۴}{x+۱} - \frac{۱}{x-۲} \ge ۰ \Rightarrow \frac{۴(x-۲)-(x+۱)}{(x+۱)(x-۲)} \ge ۰ \Rightarrow \underbrace{\frac{۳x-۹}{(x+۱)(x-۲)}}_{p(x)} \ge ۰$

x		-۱		۲		۳	
$p(x)$	$-$	ت‌ن	$+$	ت‌ن	$-$	۰	$+$

$p(x) \ge ۰ \Rightarrow x \in (-۱, ۲) \cup [۳, +\infty)$

با مقایسه معلوم می‌شود که $a = -۱$ ، $b = ۲$ و $c = ۳$ است.

$abc = -۶$

درسنامه

تابع گویا

اگر $p(x)$ و $q(x)$ دو تابع چندجمله‌ای باشند در این صورت $y = \frac{p(x)}{q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم و دامنهٔ آن همهٔ اعداد حقیقی به غیر از اعدادی که مخرج را صفر می‌کنند؛ می‌باشد.

$D_y = \mathbb{R} - \{x | q(x) = ۰\}$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۴ **۱** دامنه و ضابطه نباید تغییر کند اما برد زیر مجموعهٔ هم‌دامنه است.

$R_f = [۲ , ۳]$

۶۵ **۴**

$x > ۰ \Rightarrow f(x) = ۲ \Rightarrow g(f(x)) = g(۲) = \frac{۱}{\sqrt{-۱}}$ = تعریف نشده

$x < ۰ \Rightarrow f(x) = ۱ \Rightarrow g(f(x)) = \frac{۱}{\sqrt{۰}}$ = تعریف نشده

درسنامه

ترکیب دو تابع:

اگر f و g دو تابع باشند به طوری‌که اشتراک برد f و دامنهٔ g غیرتهی باشد، تابع $g(f(x))$ را به صورت $(gof)(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را ترکیب g با f می‌نامیم. مراحل ساخت gof به صورت زیر است:

$x \rightarrow$ (تابع f) $\rightarrow f(x) \rightarrow$ (تابع g) $\rightarrow g(f(x))$

مرحلهٔ اول: x ورودی و $f(x)$ خروجی است.

مرحلهٔ دوم: $f(x)$ ورودی و $g(f(x))$ خروجی است.

با توجه به مراحل بالا دامنهٔ تابع $(gof)(x)$ به صورت زیر خواهد بود:

$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$

۶۶ **۴** ابتدا دامنهٔ $(gof)(x)$ را حساب می‌کنیم.

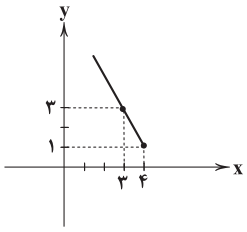
$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \le ۴ \mid \sqrt{۴-x} \in \mathbb{R}\} = (-\infty , ۴]$

حال ضابطهٔ gof را حساب می‌کنیم.

$(gof)(x) = g(f(x)) = ۲(۴-x)+۱ = ۹-۲x$

x	۴	۳
y	۱	۳

بنابراین باید خط $y = ۹-۲x$ را با شرط $x \le ۴$ رسم کنیم.



بنابراین $R_{gof} = [۱, +\infty)$

۶۷ **۳**

$\frac{x}{f(g(x))} = \frac{۱}{x} \Rightarrow ۳g(x)-۱ = x^۲ \xrightarrow{x=\sqrt{۲}} ۳g(\sqrt{۲})-۱ = ۲$

$\Rightarrow g(\sqrt{۲}) = ۱$

۶۸ **۳** چون تابع f اکیداً صعودی است، نقطهٔ برخورد f و $f^{-۱}$ از حل معادلهٔ $f(x) = x$ به دست می‌آید.

$\frac{۱}{۲}\sqrt{x+۳} = x \Rightarrow \sqrt{x+۳} = ۲x \Rightarrow x = ۱$

پس نقطه برخورد $A(۱,۱)$ است.

$OA = \sqrt{۱^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۲}$

درسنامه

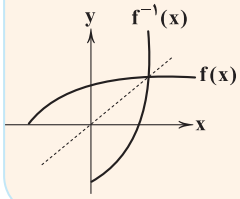
وارون یک تابع:

شرط وارون‌پذیری تابع $y = f(x)$ یک به یک بودن آن است. در صورتی‌که f یک به یک باشد، وارون $f(x)$ را با $f^{-۱}(x)$ نمایش می‌دهیم.

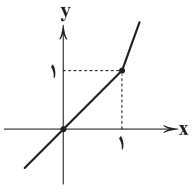
در نمایش زوج مرتبی تابع، برای محاسبهٔ وارون تابع یک به یک کافی است، جای مؤلفه‌های اول و دوم هر زوج مرتب را عوض کنیم. مانند:

$f = \{(۱, -۱) , (۲ , ۴)\} \Rightarrow f^{-۱} = \{(-۱, ۱) , (۴ , ۲)\}$

نکته: برای رسم نمودار $f^{-۱}$ از روی f کافی است نمودار f را نسبت به خط $y = x$ متقارن کنیم. برای محاسبهٔ ضابطهٔ وارون تابع f کافی است x را برحسب y محاسبه کنیم. سپس جای x و y را عوض کنیم. (y به دست آمده را با $f^{-۱}$ نمایش می‌دهیم.)



۶۹ **۳** باید تابع f یک به یک باشد.



برد ضابطهٔ دوم $(۱, +\infty)$ است، پس نباید برد ضابطهٔ اول بیش‌تر از یک باشد.

$۱+a \le ۱ \Rightarrow a \le ۰$

۷۰ **۲**

$h(x) = (f+g)(x) = f(x)+g(x) = ۲\sqrt{x}$

$y = ۲\sqrt{x} \Rightarrow y^۲ = ۴x \Rightarrow x = \frac{y^۲}{۴} \Rightarrow h^{-۱}(x) = \frac{x^۲}{۴}$

$\Rightarrow h^{-۱}(\sqrt{۸}) = \frac{۸}{۲} = ۲$

درسنامه

اعمال جبری روی توابع:

اگر توابع f و g به ترتیب با دامنه‌های D_f و D_g باشند، اعمال جبری روی f و g یعنی چهار عمل اصلی آن‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود.

۱) $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $D_{f+g} = D_f \cap D_g$

۲) $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$, $D_{f-g} = D_f \cap D_g$

۳) $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $D_{fg} = D_f \cap D_g$

۴) $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = ۰\}$

نکته: اگر $(a , b) \in f$, $(a , c) \in g$ باشند، آن‌گاه:

۱) $(a , b+c) \in (f+g)$

۲) $(a , b-c) \in (f-g)$

۳) $(a , bc) \in fg$

۴) $(a , \frac{b}{c}) \in \frac{f}{g} , c \neq ۰$

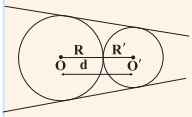
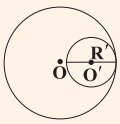
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۱ **۴** شعاع دایره‌ها را به ترتیب از کوچک به بزرگ $r-d$ ، r و $r+d$ در نظر می‌گیریم. قطر دایرهٔ بزرگ‌تر برابر مجموع قطرهای دو دایرهٔ دیگر است.

$$r+d=r+r-d \Rightarrow r=2d$$

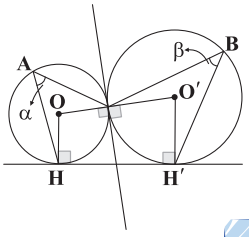
$$\frac{d}{r-d}=\frac{d}{2d-d}=1$$

درسنامه

وضعیت دو دایره	تعداد مماس مشترک‌های خارجی	تعداد مماس مشترک‌های داخلی	روابط	اشکال
دو دایرهٔ مماس برون (مماس خارج)	۲	۱	$d=R+R'$	
دو دایرهٔ مماس درون (مماس داخل)	۱	صفر	$d=\lvert R-R'\rvert$	

۷۲ **۱** مرکزها را O و O' می‌نامیم. خط‌المرکزین و شعاع‌ها را در نقطهٔ تماس رسم می‌کنیم. زوایای مرکزی O و O' دو برابر زوایای محیطی α و β هستند، پس $\hat{O}=2\alpha$ و $\hat{O}'=2\beta$ است. در چهارضلعی $OHH'O'$ مجموع زوایا 360° است.

$$2\alpha+2\beta+180^\circ=360^\circ \Rightarrow 2\alpha+2\beta=180^\circ \Rightarrow \alpha+\beta=90^\circ$$



درسنامه

شعاع در نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است.

۷۳ **۱** شعاع‌ها را R و R'، خط‌المرکزین را d و مماس مشترک‌ها را TT' و SS' در نظر می‌گیریم:

$$TT'^2+SS'^2=d^2 \Rightarrow d^2-(R-R')^2+d^2-(R+R')^2=d^2$$

$$\Rightarrow d^2=(R+R')^2+(R-R')^2=2(R^2+R'^2)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{R^2+R'^2}=2$$

درسنامه

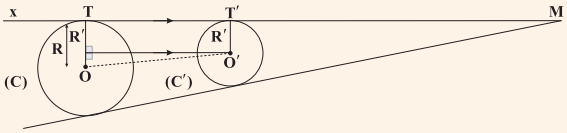
اندازهٔ مماس مشترک داخلی دو دایره:

اندازهٔ مماس مشترک داخلی دو دایره متخارج از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$SS'=\sqrt{d^2-(R+R')^2}$$

اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایره: اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایره از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$(TT')^2=d^2-(R-R')^2 \Rightarrow TT'=\sqrt{d^2-(R-R')^2}$$

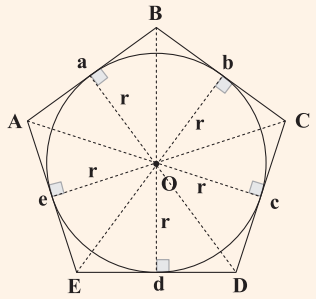


۷۴ **۲**

$$S=rp \Rightarrow 4(2p)=rp \Rightarrow r=8$$

درسنامه

اگر در یک n ضلعی محیطی با مساحت S و محیط $2p$، شعاع دایرهٔ محاطی برابر r باشد، آن‌گاه داریم: $S=rp$



۷۵ **۲** $AE=AD=x$ آن‌گاه $FC=DC=3x$ خواهد بود.

ضمناً $BE=BF=8$ است. در مثلث قائم‌الزاویه ABC رابطهٔ فیثاغورس را اعمال می‌کنیم:

$$BC^2=AB^2+AC^2 \Rightarrow (3x+8)^2=(x+8)^2+(4x)^2$$

$$\Rightarrow 9x^2+48x+64=x^2+16x+64+16x^2 \Rightarrow 8x^2-32x=0$$

$$\Rightarrow 8x(x-4)=0 \xrightarrow{x\neq 0} x=4$$

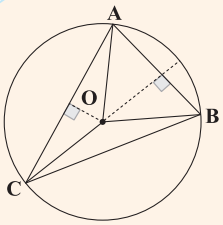
$$r=AE=AD=x=4$$

درسنامه

دایره‌های محاطی و محیطی مثلث:

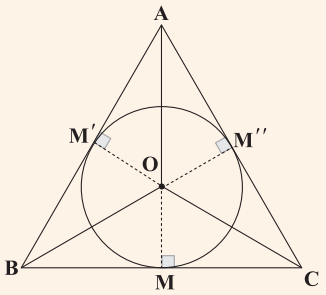
می‌دانیم عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث همرسند. بنابراین اگر از نقطهٔ همرسی سه عمودمنصف و با شعاع فاصلهٔ این نقطه تا یک رأس دایره‌ای رسم کنیم، این ایره از هر سه رأس مثلث می‌گذرد. یعنی دایرهٔ محیطی مثلث است. در نتیجه مثلث همواره محاطی است و هر مثلث فقط یک دایرهٔ محیطی دارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir



می‌دانیم نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث در نقطهٔ درون مثلث همرسند. در نتیجه مثلث، محیطی نیز می‌باشد.

بنابر ویژگی نیمساز، این نقطه از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است. پس مرکز دایرهٔ محاطی مثلث نقطهٔ همرسی سه نیمساز است و فاصلهٔ این نقطه از هر یک از سه ضلع برابر است. هر مثلث فقط یک دایرهٔ محاطی داخلی دارد.



۷۶ **۳**

$$\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۱}{r}\Rightarrow\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲r_c}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{۳}{۲r_c}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow r_c=۶\Rightarrow r_b=۱۲$$

$$r_a+r_b+r_c=۴+۶+۱۲=۲۲$$

درسنامه

نکته: اگر r_a، r_b و r_c شعاع‌های سه دایرهٔ محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی باشد، آن‌گاه داریم:

$$\frac{۱}{r}=\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}$$

۷۷ **۱**

$$\frac{x}{y}=\frac{۲r\tan(\frac{۱۸۰}{۱۲})^\circ}{۲r\sin(\frac{۱۸۰}{۱۲})^\circ}=\frac{۱}{\cos(۱۵^\circ)}=\frac{۱}{\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}}=\frac{۴}{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}$$

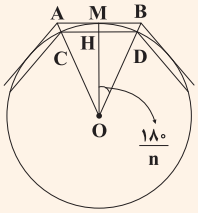
$$\frac{۴}{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}=\sqrt{۶}-\sqrt{۲}$$

درسنامه

توجه: اگر S_n و S'_n مساحت‌های n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی باشند، آن‌گاه:

$$S_n=\frac{۱}{۲}nR^۲\sin\frac{۳۶۰^\circ}{n},\ S'_n=nR^۲\tan\frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

$$CD=۲R\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n},\ AB=۲R\tan\frac{۱۸۰^\circ}{n}$$



۷۸ **۲** اگر ضلع ۸ ضلعی منتظم را a فرض کنیم:

$$۲a^۲(۱+\sqrt{۲})=۳۲(۱+\sqrt{۲})\Rightarrow a^۲=۱۶\Rightarrow a=۴$$

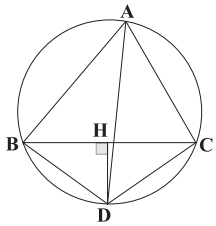
$$a=۲r\tan(\frac{۱۸۰}{۸})^\circ\Rightarrow ۴=۲r\tan ۲۲/۵^\circ$$

$$\Rightarrow r=\frac{۲}{\sqrt{۲}-۱}=۲(\sqrt{۲}+۱)$$

۷۹ **۲** عمودمنصف و نیمساز یک‌دیگر را روی دایرهٔ محیطی قطع می‌کنند. چهارضلعی ABDC محاطی است. پس:

$$\hat{A}+\hat{D}=۱۸۰^\circ\xrightarrow{\hat{D}=۲\hat{A}}۳\hat{A}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{A}=۶۰^\circ$$

$$\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{B}+\hat{C}+\hat{A}=۲۴۰^\circ$$



۸۰ **۴**

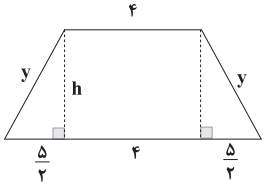
$$\frac{x+۱۳-x}{۲}\sqrt{x(۱۳-x)}=۳۹$$

$$\sqrt{x(۱۳-x)}=۶\Rightarrow x=۴$$

$$y+y=۴+۹\Rightarrow y=\frac{۱۳}{۲}$$

$$h^۲=(\frac{۱۳}{۲})^۲-(\frac{۵}{۲})^۲\Rightarrow h=۶$$

ضمناً می‌توانیم واسطهٔ هندسی قاعده‌ها را برای h در نظر بگیریم:



درسنامه

نکته: اگر ذوزنقه‌ای هم محیطی و هم محاطی باشد، مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعدهٔ آن ضرب در میانگین هندسی آن‌ها.

$$\text{مساحت ذوزنقه}=(\frac{x+y}{۲})\times\sqrt{xy}$$

(x و y قاعده‌های ذوزنقه می‌باشند.)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

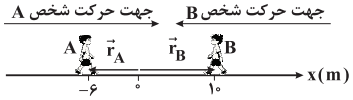
فیزیک

۸۱ **۴** تمام عبارت‌های مطرح‌شده، نادرست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

الف) می‌دانیم بردار مکان متحرک در هر لحظهٔ دلخواه، برداری است که مبدأ مکان ($x=0$) را در لحظهٔ مورد نظر، به مکان متحرک وصل می‌کند. بنابراین، با توجه به شکل زیر، داریم:

$\vec{r}_A$ در خلاف جهت محور x و $\vec{r}_B$ در جهت محور x است.



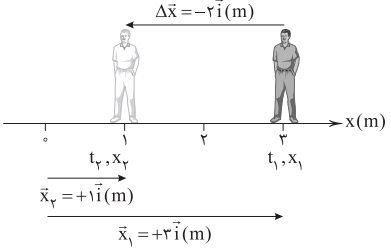
ب) در لحظهٔ نشان داده‌شده، شخص A در جهت محور x و شخص B در خلاف جهت محور x در حرکت است. بنابراین، بردار سرعت شخص A در جهت محور x و بردار سرعت شخص B در خلاف جهت محور x است.

ج) در لحظهٔ نشان داده‌شده، صرفاً به کمک جهت بردارهای مکان و جابه‌جایی نمی‌توان جهت شتاب را برای دو شخص A و B تعیین کرد.

۸۲ **۳** عبارت‌های «الف»، «ب» و «ج» درست هستند.

بررسی عبارت نادرست:

د) به مثال زیر توجه کنید.



۸۳ **۴** **گام اول)** طبق صورت سؤال، $(s_{av})_{۰\to۲۰s}=۰/۹\times|v_{۹s}|$ است و با توجه به اطلاعات روی نمودار مکان ـ زمان داریم:

$$|v_{۹s}|=|\text{شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ } t=۹s|=\frac{x'}{۱۲-۹}=\frac{x'}{۳}$$

$$۰\le t<۲۰s: \ell=۳۰-x'+۳۰+۲x'=۶۰+x'$$

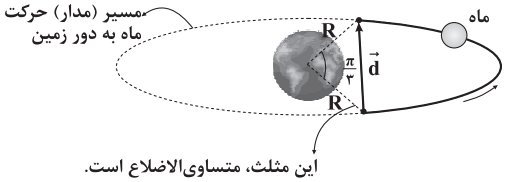
$$(s_{av})_{۰\to۲۰s}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۶۰+x'}{۲۰} \xrightarrow{(s_{av})_{۰\to۲۰s}=۰/۹|v_{۹s}|}$$

$$\frac{۶۰+x'}{۲۰}=۰/۹\times\frac{x'}{۳}\Rightarrow ۶۰+x'=۶x'\Rightarrow ۵x'=۶۰\Rightarrow x'=۱۲m$$

گام دوم) اولین لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان متحرک $t_۱=۱۴s$ و دومین لحظهٔ تغییر جهت حرکت آن، $t_۲=۱۶s$ است. بنابراین تندی متوسط در این بازهٔ زمانی، برابر است با:

$$\begin{cases}\ell'=x'=۱۲m\\ \Delta t=t_۲-t_۱=۱۶-۱۴=۲s\end{cases}\Rightarrow s'_{av}=\frac{\ell'}{\Delta t}=\frac{۱۲}{۲}=۶\frac{m}{s}$$

۸۴ **۱** با توجه به شکل زیر، داریم:



این مثلث، متساوی‌الاضلاع است.

$$\ell=R\theta=R\times\frac{\pi}{۳}=\frac{\pi R}{۳}$$

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{\pi R}{۳\Delta t}$$

$$|\vec{d}|=R\Rightarrow|\vec{v}_{av}|=\frac{|\vec{d}|}{\Delta t}=\frac{R}{\Delta t}\Rightarrow\frac{s_{av}}{|\vec{v}_{av}|}=\frac{\frac{\pi R}{۳\Delta t}}{\frac{R}{\Delta t}}=\frac{\pi}{۳}$$

۸۵ **۳** **گام اول)** در بازهٔ زمانی ۵۰s تا ۱۰۰s، شیب نمودار مکان ـ زمان ثابت بوده و بنابراین سرعت متحرک در لحظهٔ ۸۰s، برابر با سرعت متوسط آن در این بازهٔ زمانی است:

$$v_{۸۰s}=(v_{av})_{۵۰s-۱۰۰s}=\frac{x_{۱۰۰s}-x_{۵۰s}}{۱۰۰-۵۰}=\frac{۲۵۰-۱۰۰}{۵۰}=۳\frac{m}{s}$$

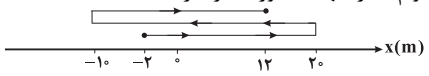
گام دوم) برای این‌که سرعت متوسط دونده حداکثر باشد، باید سراغ بازهٔ زمانی‌ای برویم که شیب نمودار مکان ـ زمان بیشینه است و این اتفاق در بازهٔ زمانی صفر تا ۲۵s رخ داده است:

$$(v_{av})_{max}=(v_{av})_{۰\to۲۵s}=\frac{x_{۲۵s}-x_{۰}}{۲۵-۰}=\frac{۱۰۰-۰}{۲۵}=۴\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow\frac{v_{۸۰s}}{(v_{av})_{max}}=\frac{۳}{۴}$$

۸۶ **۴** متحرک در لحظهٔ $t_۱=۴s$ از مکان $x_۱=-۲m$ و در لحظهٔ $t_۲=۸s$ از مکان $x_۲=۱۲m$ عبور می‌کند. بنابراین با توجه به مکان‌هایی که جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند، می‌توانیم مسیرهای حرکت متحرک را به یکی از شکل‌های زیر در نظر بگیریم:

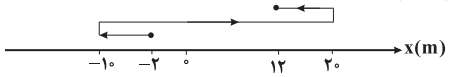
۱) متحرک در لحظات $t_۱$ و $t_۲$ در جهت محور x در حرکت باشد:



$$\ell=(۲۰-(-۲))+(۲۰-(-۱۰))+(۱۲-(-۱۰))=۲۲+۳۰+۲۲=۷۴m$$

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۷۴}{۸-۴}=\frac{۷۴}{۴}=۱۸/۵\frac{m}{s}$$

۲) متحرک در لحظات $t_۱$ و $t_۲$ در خلاف جهت محور x در حرکت باشد:



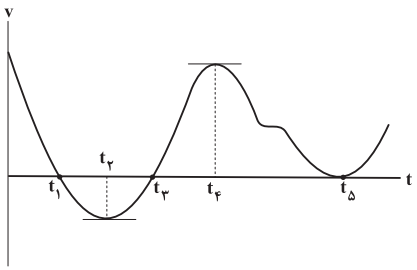
$$\ell=(-۲-(-۱۰))+(۲۰-(-۱۰))+(۲۰-۱۲)=۸+۳۰+۸=۴۶m$$

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۴۶}{۴}=۱۱/۵\frac{m}{s}$$

بنابراین تندی متوسط متحرک می‌تواند $۱۸/۵\frac{m}{s}$ یا $۱۱/۵\frac{m}{s}$ باشد.

بچه‌ها امیدوارم متوجه شده باشید که در لحظهٔ $t_۱$ و لحظهٔ $t_۲$ باید جهت حرکت متحرک یکسان باشد، تا متحرک بتواند در دو مکان $-۱۰m$ و $+۲۰m$ تغییر جهت دهد.

۸۷ **۲** با توجه به نمودار، در لحظات $t_۲$، $t_۴$ و $t_۵$، علامت شیب مماس بر نمودار، یعنی جهت شتاب دوچرخه‌سوار تغییر می‌کند:



از طرفی در لحظات $t_۱$ و $t_۳$ علامت سرعت دوچرخه‌سوار عوض شده و جهت حرکت آن تغییر می‌کند: $n=۲$

$$\Rightarrow\frac{m}{n}=\frac{۳}{۲}$$

۸۸ **۴** **گام اول)** ابتدا در لحظات $t_۱=۱s$ و $t_۲=۴s$ مکان متحرک را به دست آورده و سرعت متوسط آن را بررسی می‌کنیم:

$$x=t^۲+bt-۸/۲۵\begin{cases}t_۱=۱s\to x_۱=(۱)^۲+b(۱)-۸/۲۵=b-۷/۲۵\\ t_۲=۴s\to x_۲=(۴)^۲+b(۴)-۸/۲۵=۴b+۷/۷۵\end{cases}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

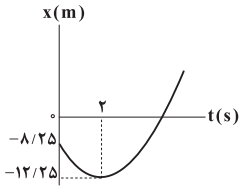
$$\Delta x = x_۲ - x_۱ = ۴b + ۷/۷۵ - b + ۷/۲۵ = ۳b + ۱۵$$

$$\xrightarrow[\Delta t = ۴-۱ = ۳s]{v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}} v_{av} = \frac{۳b+۱۵}{۳} = b + ۵$$

$$\xrightarrow{v_{av} = +۱\frac{m}{s}} b + ۵ = ۱ \Rightarrow b = -۴ \Rightarrow x = t^۲ - ۴t - ۸/۲۵$$

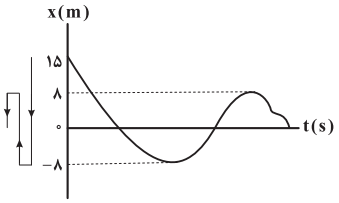
گام دوم) حالا کافیست نمودار مکان-زمان متحرک را رسم کرده و در مکان‌های منفی (بردار مکان در خلاف جهت محور x)، حداکثر فاصلهٔ متحرک را از مبدأ مکان به دست آوریم:

$$t_{\text{رأس}} = -\frac{b}{۲a} = \frac{۴}{۲} = ۲s \ , \ x_{\text{رأس}} = (۲)^۲ - ۴(۲) - ۸/۲۵ = -۱۲/۲۵m$$



در مکان‌های منفی، حداکثر فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان ۱۲/۲۵ است.

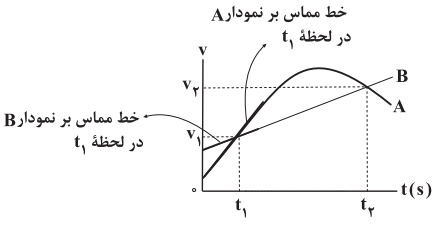
۸۹ ۳ با توجه به نمودار مکان ـ زمان، متحرک از مکان $+۱۵m$ در خلاف جهت محور x حرکت کرده و به مکان $-۸m$ می‌رسد. پس از مکان $-۸m$ در جهت محور x حرکت کرده و به مکان $+۸m$ می‌رسد. در نهایت از مکان $+۸m$ در خلاف جهت محور x حرکت کرده و به مبدأ مکان می‌رسد و مسیر حرکت رسم شده در گزینهٔ (۳) درست است.



۹۰ ۴ گام اول) با توجه به نمودار سرعت ـ زمان در دو لحظهٔ $t_۱$ و $t_۲$، سرعت دو متحرک یکسان بوده و طبق رابطهٔ $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$، شتاب متوسط دو متحرک یکسان می‌شود:

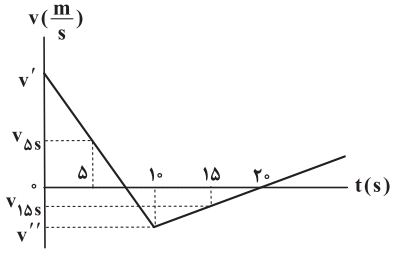
$$(a_{av})_A = (a_{av})_B$$

گام دوم) در لحظهٔ $t_۱$، شیب مماس بر نمودار A، بزرگ‌تر از شیب مماس بر نمودار B است و در نتیجه، در این لحظه، $a_A > a_B$ است:



۹۱ ۳ اگر سرعت خودرو در مبدأ زمان را v' و در لحظهٔ $t = ۱۰s$، را v'' فرض کنیم، به کمک تشابه مثلث‌ها داریم:

$$\frac{v' - v_{۵s}}{۵ - ۰} = \frac{v' - v''}{۱۰ - ۰} \Rightarrow v' - v_{۵s} = \frac{v' - v''}{۲} \Rightarrow v_{۵s} = \frac{v' + v''}{۲}$$



$$\frac{۰ - v''}{۲۰ - ۱۰} = \frac{۰ - v_{۱۵s}}{۲۰ - ۱۵} \Rightarrow v_{۱۵s} = \frac{۱}{۲}v''$$

$$\xrightarrow{a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}} a_{av} = \frac{v_{۱۵s} - v_{۵s}}{۱۵ - ۵} \Rightarrow -۱/۲ = \frac{\frac{۱}{۲}v'' - \frac{v' + v''}{۲}}{۱۰}$$

$$\Rightarrow -۱۲ = -\frac{v'}{۲} \Rightarrow v' = ۲۴\frac{m}{s}$$

۹۲ ۲ بررسی تمام عبارت‌های داده‌شده:

الف) می‌دانیم در حرکت با سرعت ثابت، چون جهت حرکت متحرک تغییر نمی‌کند، پس در هر بازهٔ زمانی دلخواهی، مسافت طی‌شده توسط متحرک برابر با اندازهٔ جابه‌جایی آن است. (✓)

ب) می‌دانیم در حرکت با سرعت ثابت، معادلهٔ مکان—زمان متحرک به صورت $x = vt + x_۰$ است. در مبدأ زمان، فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان، ۱۲m است. بنابراین داریم:

$x_۰ = +۱۲m \Rightarrow x = ۲t + ۱۲ \xrightarrow{x=۰} ۲t + ۱۲ = ۰ \Rightarrow t = -۶s$ غ‌ق‌ق

$\Rightarrow$ جهت بردار مکان متحرک عوض نمی‌شود.

$x_۰ = -۱۲m \Rightarrow x = ۲t - ۱۲ \xrightarrow{x=۰} ۲t - ۱۲ = ۰ \Rightarrow t = ۶s$ ق‌ق

$\Rightarrow$ جهت بردار مکان متحرک در لحظهٔ $t = ۶s$ عوض می‌شود. (✓)

ج) در حرکت با سرعت ثابت، فاصلهٔ متحرک از محل شروع حرکت ($|x - x_۰|$) برابر است با:

$|x - x_۰| = |vt| = |۲ \times ۱۰| = ۲۰m$ (✗)

۹۳ ۴ گام اول) در حرکت با سرعت ثابت، سرعت خودرو با سرعت متوسط آن در هر بازهٔ زمانی دلخواهی برابر است. بنابراین داریم:

$$v = (v_{av})_{\text{سه ثانیهٔ چهارم}} = (\frac{\Delta x}{\Delta t})_{\text{سه ثانیهٔ چهارم}} = -\frac{۲۴}{۳} = -۸\frac{m}{s}$$

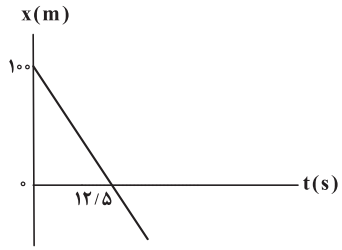
گام دوم) معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک را به دست می‌آوریم:

$$x = vt + x_۰ = -۸t + x_۰ \xrightarrow{t=۵s \ , \ x_{۵s} = ۶۰m} ۶۰ = -۸(۵) + x_۰$$

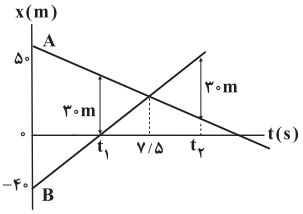
$$\Rightarrow x_۰ = ۱۰۰m \Rightarrow x = -۸t + ۱۰۰$$

گام سوم) لحظهٔ عبور از مبدأ مکان متحرک را به دست می‌آوریم و نمودار مکان ـ زمان را به طور دقیق رسم می‌کنیم:

$$x = ۰ \Rightarrow -۸t + ۱۰۰ = ۰ \Rightarrow t = \frac{۱۰۰}{۸} = ۱۲/۵s$$



۹۴ ۲ روش اول) با توجه به شکل زیر و به کمک تشابه مثلث‌ها داریم:



$$\frac{۵۰ - (-۴۰)}{۳۰} = \frac{۷/۵}{۷/۵ - t_۱} \Rightarrow ۱ = \frac{۲/۵}{۷/۵ - t_۱} \Rightarrow ۷/۵ - t_۱ = ۲/۵$$

$$\Rightarrow t_۱ = ۵s$$

$$\frac{۵۰ - (-۴۰)}{۳۰} = \frac{۷/۵}{t_۲ - ۷/۵} \Rightarrow ۱ = \frac{۲/۵}{t_۲ - ۷/۵} \Rightarrow t_۲ - ۷/۵ = ۲/۵$$

$$\Rightarrow t_۲ = ۱۰s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

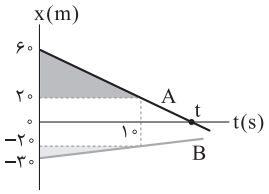
در بازهٔ زمانی ۵s تا ۱۰s، فاصلهٔ دو متحرک کوچک‌تر از ۳۰m است. پس در ۲۰ ثانیهٔ اول حرکت، در بازه‌های زمانی صفر تا ۵s و ۱۰s تا ۲۰s، در مجموع به مدت $(۲۰-۱۰)+(۵-۰)=۱۵s$، فاصلهٔ دو متحرک، بزرگ‌تر یا مساوی ۳۰m است. روش دوم) با توجه به نمودار، دو متحرک با سرعت ثابت و در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند و در لحظهٔ ۷/۵s، نسبت به هم ۹۰m جابه‌جا می‌شوند. بنابراین داریم:

$$v_{\text{نسبی}}=|v_A|+|v_B|$$
$$|\Delta x_{\text{نسبی}}|=|v_{\text{نسبی}}|\Delta t \Rightarrow ۹۰=|v_{\text{نسبی}}|\times ۷/۵$$
$$\Rightarrow |v_{\text{نسبی}}|=\frac{۹۰}{۷/۵}=۱۲\frac{m}{s} \Rightarrow |\Delta x_{\text{نسبی}}|=۱۲t$$

برای این‌که فاصلهٔ دو متحرک از هم، بزرگ‌تر یا مساوی ۳۰m باشد، باید داشته باشیم:

$$|\Delta x_{\text{نسبی}}|\le ۶۰ \Rightarrow ۱۲t\le ۶۰ \Rightarrow t\le ۵s \xrightarrow{\text{در ۲۰ ثانیهٔ اول حرکت}}$$
$$|\Delta x_{\text{نسبی}}|\ge ۱۲۰ \Rightarrow ۱۲t\ge ۱۲۰ \Rightarrow t\ge ۱۰s$$
$$(۵-۰)+(۲۰-۱۰)=۱۵s$$

۹۵ | ۱ ابتدا با توجه به نمودار، سرعت هر یک از متحرک‌ها را به دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} v_A=-\frac{۴۰}{۱۰}=-۴\frac{m}{s} \\ v_B=\frac{۱۰}{۱۰}=۱\frac{m}{s} \end{cases}$$

با توجه به این‌که دو متحرک در خلاف جهت هم در حال حرکت هستند، بنابراین سرعت نسبی آن‌ها برابر است با:

$$v_{\text{نسبی}}=v_B-v_A=۱-(-۴)=۵\frac{m}{s}$$

مدت زمانی که طول می‌کشد تا دو متحرک به یک‌دیگر برسند، برابر است با:

$$|v_{\text{نسبی}}|=\frac{|\Delta x_{\text{نسبی}}|}{\Delta t} \Rightarrow ۵=\frac{۹۰}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t=۱۸s$$

معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک A برابر است با:

$$x_A=v_A t+x_{۰A} \Rightarrow x_A=-۴t+۶۰$$

لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان متحرک A برابر است با:

$$x_A=-۴t+۶۰ \xrightarrow{x_A=۰} t=۱۵s$$

با توجه به نمودار داده‌شده در بازهٔ زمانی $t=۰$ تا $t=۱۵s$ بردار مکان متحرک A در جهت محور x و در بازهٔ زمانی $t=۱۵s$ تا $t=۱۸s$ بردار مکان متحرک A در خلاف جهت محور x است، بنابراین نسبت خواسته‌شده برابر است با:

$$\frac{۳}{۱۸}=\frac{۱}{۶}$$

۹۶ | ۱ **گام اول)** فرض کنید مدت زمان حرکت دوندهٔ A، t ثانیه باشد. در این صورت داریم:

$$\Delta t_۱=\frac{۳}{۵}t,\ \Delta t_۲=\frac{۲}{۵}t \Rightarrow v_{av_A}=\frac{\Delta x_۱+\Delta x_۲}{\Delta t_A}=\frac{v_۱\Delta t_۱+v_۲\Delta t_۲}{t}$$
$$=\frac{۵(\frac{۳}{۵}t)+۳(\frac{۲}{۵}t)}{t} \Rightarrow v_{av_A}=۳+\frac{۶}{۵}=\frac{۲۱}{۵}\frac{m}{s}$$

گام دوم) جابه‌جایی کل دوندهٔ B برابر ℓ است و داریم:

$$\Delta x_۱=\frac{۳}{۵}\ell,\ \Delta x_۲=\frac{۲}{۵}\ell$$

$$v_{av_B}=\frac{\ell}{\Delta t_B}=\frac{\ell}{\Delta t_۱+\Delta t_۲}=\frac{\ell}{\frac{\Delta x_۱}{v_۱}+\frac{\Delta x_۲}{v_۲}}=\frac{\ell}{\frac{\frac{۳}{۵}\ell}{۴}+\frac{\frac{۲}{۵}\ell}{۲}}$$
$$v_{av_B}=\frac{۱}{\frac{۳}{۲۰}+\frac{۱}{۵}}=\frac{۲۰}{۷}\frac{m}{s}$$
$$\Rightarrow \frac{v_{av_A}}{v_{av_B}}=\frac{\frac{۲۱}{۵}}{\frac{۲۰}{۷}}=\frac{۷\times ۲۱}{۲۰\times ۵}=۱/۴۷$$

۹۷ | ۳ با توجه به رابطهٔ سرعت در مسابقهٔ اول داریم:

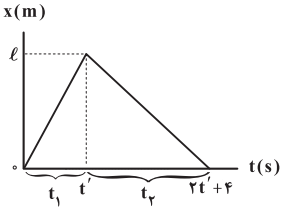
$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B}=\frac{\Delta x_A}{\Delta x_B}\times\frac{\Delta t_B}{\Delta t_A}$$
$$\xrightarrow{\Delta t_A=\Delta t_B} \frac{v_A}{v_B}=\frac{۲۰۰}{۱۶۰}=\frac{۵}{۴} \quad (*)$$

در مسابقهٔ دوم اگر هر دو دونده هم‌زمان با هم به نقطهٔ پایان برسند، آن‌گاه دوندهٔ B برندهٔ مسابقه نخواهد بود.

$$\frac{v_A}{v_B}=\frac{\Delta x'_A}{\Delta x'_B}\times\frac{\Delta t'_B}{\Delta t'_A}$$
$$\xrightarrow[(*)]{\Delta t'_B=\Delta t'_A} \frac{۵}{۴}=\frac{\Delta x'_A}{۲۰۰} \Rightarrow \Delta x'_A=۲۵۰m$$

اگر دوندهٔ A از ۵۰m عقب‌تر، مسابقه را شروع کند، با دوندهٔ B هم‌زمان به خط پایان می‌رسد و دوندهٔ B برندهٔ مسابقه نخواهد شد.

۹۸ | ۳ **گام اول)** اگر مدت‌زمان رفت برابر با $t_۱$ و مدت‌زمان برگشت برابر با $t_۲$ باشد وطول مسیر را ℓ در نظر بگیریم، داریم:



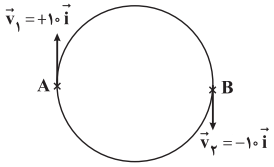
$$t_۱=t',\ t_۲=t'+۴s$$
$$\left.\begin{aligned} v_۱=\frac{\ell}{t_۱} \Rightarrow v=\frac{\ell}{t'} \\ v_۲=\frac{\ell}{t_۲} \Rightarrow v-۱۵=\frac{\ell}{t'+۴} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{اختلاف طرفین}}$$
$$۱۵=\ell(\frac{۱}{t'}-\frac{۱}{t'+۴}) \Rightarrow ۱۵=\frac{۴\ell}{t'(t'+۴)} \qquad (۱)$$

گام دوم) برای کل مسیر حرکت (رفت و برگشت) داریم:

$$(s_{av})_{\text{کل}}=\frac{۲\ell}{۲t'+۴}=\frac{\ell}{t'+۲} \Rightarrow ۳۶=\frac{\ell}{t'+۲} \qquad (۲)$$
$$\xrightarrow{(۲)\div(۱)} \frac{۳۶}{۱۵}=\frac{\frac{\ell}{t'+۲}}{\frac{۴\ell}{t'(t'+۴)}} \Rightarrow \frac{۱۲}{۵}=\frac{t'(t'+۴)}{۴(t'+۲)}$$
$$\Rightarrow ۵t'^۲+۲۰t'=۴۸t'+۹۶ \Rightarrow ۵t'^۲-۲۸t'-۹۶=۰$$
$$\Rightarrow \Delta=(-۲۸)^۲-۴(۵)(-۹۶)$$
$$\Rightarrow \Delta=۷۸۴+۱۹۲۰=۲۷۰۴=(۵۲)^۲ \Rightarrow \begin{cases} t'=\frac{۲۸-۵۲}{۱۰}=-۲/۴s \text{ غ ق ق} \\ t'=\frac{۲۸+۵۲}{۱۰}=۸s \text{ ق ق} (\checkmark) \end{cases}$$
$$\xrightarrow{(۱)} ۱۵=\frac{۴\ell}{۸\times ۱۲} \Rightarrow \ell=۳۶۰m$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۹ **۳** فرض می‌کنیم متحرک از نقطهٔ A در جهت ساعتگرد شروع به حرکت می‌کند و به نقطهٔ B می‌رسد.



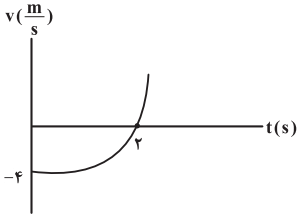
$$\vec{v}_1 = +10\vec{i} \ , \ \vec{v}_2 = -10\vec{i}$$

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = -10\vec{i} - 10\vec{i} = -20(\frac{m}{s})\vec{i}$$

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20}{2} = 10\frac{m}{s^2}$$

۱۰۰ **۴** گام اول: به دست آوردن بازهٔ زمانی‌ای که متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند:

در بازهٔ زمانی صفر تا ۲s متحرک دارای سرعت منفی است. یعنی در خلاف محور x می‌کند.



$$v = t^2 - 4 \begin{cases} \vec{v}_0 = -4\frac{m}{s}\vec{i} \\ \vec{v}_2 = 0 \end{cases}$$

پس برای شتاب متوسط آن داریم:

$$a = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{0-(-4)\vec{i}}{2} = (2\frac{m}{s^2})\vec{i}$$

۱۰۱ **۴** **گام اول)** طبق صورت سؤال، $(s_{av})_{0\to 20s} = 0/9 \times |v_{9s}|$ است و با توجه به اطلاعات روی نمودار مکان ـ زمان داریم:

$$|v_{9s}| = |\text{شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ } t = 9s| = \frac{x'}{12-9} = \frac{x'}{3}$$

$$0 \le t < 20s : \ell = 30 - x' + 30 + 2x' = 60 + x'$$

$$(s_{av})_{0\to 20s} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{60+x'}{20} \xrightarrow{(s_{av})_{0\to 20s} = 0/9|v_{9s}|}$$

$$\frac{60+x'}{20} = 0/9 \times \frac{x'}{3} \Rightarrow 60 + x' = 6x' \Rightarrow 5x' = 60 \Rightarrow x' = 12m$$

گام دوم) اولین لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان متحرک $t_1 = 14s$ و دومین لحظهٔ تغییر جهت حرکت آن، $t_2 = 16s$ است. بنابراین تندی متوسط در این بازهٔ زمانی، برابر است با:

$$\begin{cases} \ell' = x' = 12m \\ \Delta t = t_2 - t_1 = 16 - 14 = 2s \end{cases} \Rightarrow s'_{av} = \frac{\ell'}{\Delta t} = \frac{12}{2} = 6\frac{m}{s}$$

۱۰۲ **۳** **گام اول)** در بازهٔ زمانی ۵۰s تا ۱۰۰s، شیب نمودار مکان ـ زمان ثابت بوده و بنابراین سرعت متحرک در لحظهٔ ۸۰s، برابر با سرعت متوسط آن در این بازهٔ زمانی است:

$$v_{80s} = (v_{av})_{50s-100s} = \frac{x_{100s} - x_{50s}}{100-50} = \frac{250-100}{50} = 3\frac{m}{s}$$

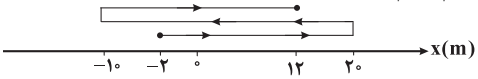
گام دوم) برای این‌که سرعت متوسط دونده حداکثر باشد، باید سراغ بازهٔ زمانی‌ای برویم که شیب نمودار مکان ـ زمان بیشینه است و این اتفاق در بازهٔ زمانی صفر تا ۲۵s رخ داده است:

$$(v_{av})_{max} = (v_{av})_{0\to 25s} = \frac{x_{25s} - x_0}{25-0} = \frac{100-0}{25} = 4\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow \frac{v_{80s}}{(v_{av})_{max}} = \frac{3}{4}$$

۱۰۳ **۴** متحرک در لحظهٔ $t_1 = 4s$ از مکان $x_1 = -2m$ و در لحظهٔ $t_2 = 8s$ از مکان $x_2 = 12m$ عبور می‌کند. بنابراین با توجه به مکان‌هایی که جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند، می‌توانیم مسیرهای حرکت متحرک را به یکی از شکل‌های زیر در نظر بگیریم:

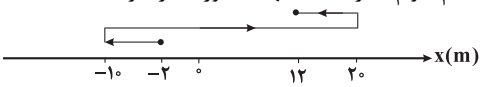
۱) متحرک در لحظات t_1 و t_2 در جهت محور x در حرکت باشد:



$$\ell = (20-(-2)) + (20-(-10)) + (12-(-10)) = 22+30+22 = 74m$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{74}{8-4} = \frac{74}{4} = 18/5\frac{m}{s}$$

۲) متحرک در لحظات t_1 و t_2 در خلاف جهت محور x در حرکت باشد:



$$\ell = (-2-(-10)) + (20-(-10)) + (20-12) = 8+30+8 = 46m$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{46}{4} = 11/5\frac{m}{s}$$

بنابراین تندی متوسط متحرک می‌تواند $18/5\frac{m}{s}$ یا $11/5\frac{m}{s}$ باشد.

بچه‌ها امیدوارم مواستان باشد، که در لحظهٔ t_1 و لحظهٔ t_2 باید جهت حرکت متحرک یکسان باشد، تا متحرک بتواند در دو مکان $-10m$ و $+20m$ تغییر جهت دهد.

۱۰۴ **۴** **گام اول)** ابتدا در لحظات $t_1 = 1s$ و $t_2 = 4s$ مکان متحرک را به دست آورده و سرعت متوسط آن را بررسی می‌کنیم:

$$x = t^2 + bt - 8/25 \begin{cases} t_1 = 1s \to x_1 = (1)^2 + b(1) - 8/25 = b - 7/25 \\ t_2 = 4s \to x_2 = (4)^2 + b(4) - 8/25 = 4b + 7/75 \end{cases}$$

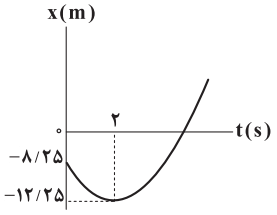
$$\Delta x = x_2 - x_1 = 4b + 7/75 - b + 7/25 = 3b + 15$$

$$\xrightarrow[\Delta t = 4-1 = 3s]{v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}} v_{av} = \frac{3b+15}{3} = b+5$$

$$\xrightarrow{v_{av} = +1\frac{m}{s}} b+5 = 1 \Rightarrow b = -4 \Rightarrow x = t^2 - 4t - 8/25$$

گام دوم) حالا کافیست نمودار مکان ـ زمان متحرک را رسم کرده و در مکان‌های منفی (بردار مکان در خلاف جهت محور x)، حداکثر فاصلهٔ متحرک را از مبدأ مکان به دست آوریم:

$$t_{\text{رأس}} = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2s \ , \ x_{\text{رأس}} = (2)^2 - 4(2) - 8/25 = -12/25m$$



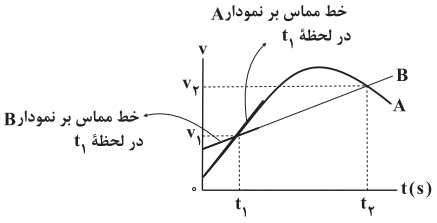
در مکان‌های منفی، حداکثر فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان ۱۲/۲۵ است.

۱۰۵ **۴** **گام اول)** با توجه به نمودار سرعت ـ زمان در دو لحظهٔ t_1 و t_2، سرعت دو متحرک یکسان بوده و طبق رابطهٔ $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$، شتاب متوسط دو متحرک یکسان می‌شود:

$$(a_{av})_A = (a_{av})_B$$

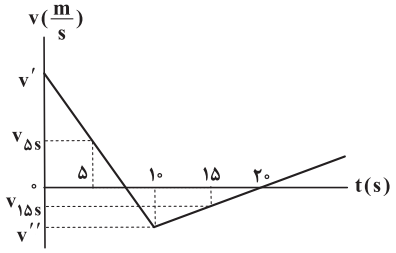
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم) در لحظهٔ t_1، شیب مماس بر نمودار A، بزرگ‌تر از شیب مماس بر نمودار B است و در نتیجه، در این لحظه، $a_A > a_B$ است:



۱۰۶ **۳** اگر سرعت خودرو در مبدأ زمان را v' و در لحظهٔ $t = 10s$، را v'' فرض کنیم، به کمک تشابه مثلث‌ها داریم:

$$\frac{v' - v_{5s}}{5-0} = \frac{v' - v''}{10-0} \Rightarrow v' - v_{5s} = \frac{v' - v''}{2} \Rightarrow v_{5s} = \frac{v' + v''}{2}$$



$$\frac{0 - v''}{20-10} = \frac{0 - v_{15s}}{20-15} \Rightarrow v_{15s} = \frac{1}{2}v''$$

$$\xrightarrow{a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}} a_{av} = \frac{v_{15s} - v_{5s}}{15-5} \Rightarrow -1/2 = \frac{\frac{1}{2}v'' - \frac{v' + v''}{2}}{10}$$

$$\Rightarrow -12 = -\frac{v'}{2} \Rightarrow v' = 24\frac{m}{s}$$

۱۰۷ **۲** بررسی تمام عبارت‌های داده‌شده:

الف) می‌دانیم در حرکت با سرعت ثابت، چون جهت حرکت متحرک تغییر نمی‌کند، پس در هر بازهٔ زمانی دلخواهی، مسافت طی‌شده توسط متحرک برابر با اندازهٔ جابه‌جایی آن است. (✓)

ب) می‌دانیم در حرکت با سرعت ثابت، معادلهٔ مکان–زمان متحرک به صورت $x = vt + x_0$ است. در مبدأ زمان، فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان، $12m$ است. بنابراین داریم:

$x_0 = +12m \Rightarrow x = 2t + 12 \xrightarrow{x=0} 2t + 12 = 0 \Rightarrow t = -6s$ غ‌ق‌ق

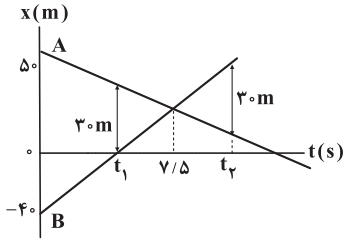
$\Rightarrow$ جهت بردار مکان متحرک عوض نمی‌شود.

$x_0 = -12m \Rightarrow x = 2t - 12 \xrightarrow{x=0} 2t - 12 = 0 \Rightarrow t = 6s$ ق‌ق

$\Rightarrow$ جهت بردار مکان متحرک در لحظهٔ $t = 6s$ عوض می‌شود. (✓)

ج) در حرکت با سرعت ثابت، فاصلهٔ متحرک از محل شروع حرکت ($|x - x_0|$) برابر است با: $|x - x_0| = |vt| = |2 \times 10| = 20m$ (✗)

۱۰۸ **۲** روش اول) با توجه به شکل زیر و به کمک تشابه مثلث‌ها داریم:



$$\frac{50 - (-40)}{30} = \frac{7/5}{7/5 - t_1} \Rightarrow 1 = \frac{2/5}{7/5 - t_1} \Rightarrow 7/5 - t_1 = 2/5$$

$$\Rightarrow t_1 = 5s$$

$$\frac{50 - (-40)}{30} = \frac{7/5}{t_2 - 7/5} \Rightarrow 1 = \frac{2/5}{t_2 - 7/5} \Rightarrow t_2 - 7/5 = 2/5$$

$$\Rightarrow t_2 = 10s$$

در بازهٔ زمانی $5s$ تا $10s$، فاصلهٔ دو متحرک کوچک‌تر از $30m$ است. پس در ۲۰ ثانیهٔ اول حرکت، در بازه‌های زمانی صفر تا $5s$ و $10s$ تا $20s$، در مجموع به مدت $(20-10) + (5-0) = 15s$، فاصلهٔ دو متحرک، بزرگ‌تر یا مساوی $30m$ است.

روش دوم) با توجه به نمودار، دو متحرک با سرعت ثابت و در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند و در لحظهٔ $7/5s$، نسبت به هم $90m$ جابه‌جا می‌شوند. بنابراین داریم:

$$|v_{\text{نسبی}}| = |v_A| + |v_B|$$

$$|\Delta x_{\text{نسبی}}| = |v_{\text{نسبی}}| \Delta t \Rightarrow 90 = |v_{\text{نسبی}}| \times 7/5$$

$$\Rightarrow |v_{\text{نسبی}}| = \frac{90}{7/5} = 12\frac{m}{s} \Rightarrow |\Delta x_{\text{نسبی}}| = 12t$$

برای این‌که فاصلهٔ دو متحرک از هم، بزرگ‌تر یا مساوی $30m$ باشد، باید داشته باشیم:

$$|\Delta x_{\text{نسبی}}| \le 60 \Rightarrow 12t \le 60 \Rightarrow t \le 5s \xrightarrow{\text{در ۲۰ ثانیهٔ اول حرکت}}$$

$$|\Delta x_{\text{نسبی}}| \ge 120 \Rightarrow 12t \ge 120 \Rightarrow t \ge 10s$$

$$(5-0) + (20-10) = 15s$$

۱۰۹ **۱** **گام اول)** فرض کنید مدت زمان حرکت دوندهٔ A، t ثانیه باشد. در این صورت داریم:

$$\Delta t_1 = \frac{3}{5}t \,,\ \Delta t_2 = \frac{2}{5}t \Rightarrow v_{av_A} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t_A} = \frac{v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2}{t}$$

$$= \frac{5(\frac{3}{5}t) + 3(\frac{2}{5})}{t} \Rightarrow v_{av_A} = 3 + \frac{6}{5} = \frac{21}{5}\frac{m}{s}$$

گام دوم) جابه‌جایی کل دوندهٔ B برابر ℓ است و داریم:

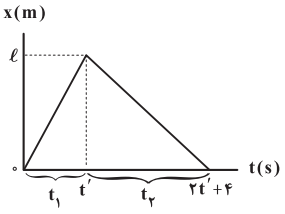
$$\Delta x_1 = \frac{3}{5}\ell \,,\ \Delta x_2 = \frac{2}{5}\ell$$

$$v_{av_B} = \frac{\ell}{\Delta t_B} = \frac{\ell}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{\ell}{\frac{\Delta x_1}{v_1} + \frac{\Delta x_2}{v_2}} = \frac{\ell}{\frac{\frac{3}{5}\ell}{4} + \frac{\frac{2}{5}\ell}{2}}$$

$$v_{av_B} = \frac{1}{\frac{3}{20} + \frac{1}{5}} = \frac{20}{7}\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow \frac{v_{av_A}}{v_{av_B}} = \frac{\frac{21}{5}}{\frac{20}{7}} = \frac{7 \times 21}{20 \times 5} = 1/47$$

۱۱۰ **۳** **گام اول)** اگر مدت‌زمان رفت برابر با t_1 و مدت‌زمان برگشت برابر با t_2 باشد وطول مسیر را ℓ در نظر بگیریم، داریم:



$$t_1 = t' \,,\ t_2 = t' + 4s$$

$$\left.\begin{aligned} v_1 = \frac{\ell}{t_1} \Rightarrow v = \frac{\ell}{t'} \\ v_2 = \frac{\ell}{t_2} \Rightarrow v - 15 = \frac{\ell}{t'+4} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{اختلاف طرفین}}$$

$$15 = \ell(\frac{1}{t'} - \frac{1}{t'+4}) \Rightarrow 15 = \frac{4\ell}{t'(t'+4)} \qquad (1)$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم) برای کل مسیر حرکت (رفت و برگشت) داریم:

$$(s_{av})_{کل}=\frac{2\ell}{2t'+4}=\frac{\ell}{t'+2}\Rightarrow 36=\frac{\ell}{t'+2} \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(2)\div(1)}\frac{36}{15}=\frac{\frac{\ell}{t'+2}}{\frac{4\ell}{t'(t'+4)}}\Rightarrow\frac{12}{5}=\frac{t'(t'+4)}{4(t'+2)}$$

$$\Rightarrow 5t'^2+20t'=48t'+96\Rightarrow 5t'^2-28t'-96=0$$

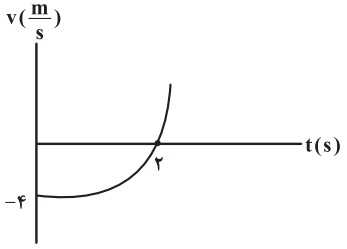
$$\Rightarrow\Delta=(-28)^2-4(5)(-96)$$

$$\Rightarrow\Delta=784+1920=2704=(52)^2\Rightarrow\begin{cases}t'=\frac{28-52}{10}=-2/4s\ \text{غ ق}\\ t'=\frac{28+52}{10}=8s\ \text{ق}\ (\checkmark)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)}15=\frac{4\ell}{8\times 12}\Rightarrow\ell=360m$$

۱۱۱ ۴ گام اول: به دست آوردن بازهٔ زمانی‌ای که متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند:

در بازهٔ زمانی صفر تا ۲s متحرک دارای سرعت منفی است. یعنی در خلاف محور x می‌کند.

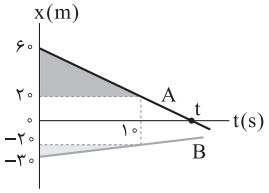


$$v=t^2-4\begin{cases}\vec{v}_0=-4\frac{m}{s}\vec{i}\\ \vec{v}_2=0\end{cases}$$

پس برای شتاب متوسط آن داریم:

$$a=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{0-(-4)\vec{i}}{2}=(2\frac{m}{s^2})\vec{i}$$

۱۱۲ ۱ ابتدا با توجه به نمودار، سرعت هر یک از متحرک‌ها را به دست می‌آوریم:



$$\begin{cases}v_A=-\frac{40}{10}=-4\frac{m}{s}\\ v_B=\frac{10}{10}=1\frac{m}{s}\end{cases}$$

با توجه به این‌که دو متحرک در خلاف جهت هم در حال حرکت هستند، بنابراین سرعت نسبی آن‌ها برابر است با:

$$v_{نسبی}=v_B-v_A=1-(-4)=5\frac{m}{s}$$

مدت زمانی که طول می‌کشد تا دو متحرک به یک‌دیگر برسند، برابر است با:

$$|v_{نسبی}|=\frac{|\Delta x_{نسبی}|}{\Delta t}\Rightarrow 5=\frac{90}{\Delta t}\Rightarrow\Delta t=18s$$

معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک A برابر است با:

$$x_A=v_A t+x_{0A}\Rightarrow x_A=-4t+60$$

لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان متحرک A برابر است با:

$$x_A=-4t+60\xrightarrow{x_A=0}t=15s$$

با توجه به نمودار داده‌شده در بازهٔ زمانی $t=0$ تا $t=15s$ بردار مکان متحرک A در جهت محور x و در بازهٔ زمانی $t=15s$ تا $t=18s$ بردار مکان متحرک A در خلاف جهت محور x است، بنابراین نسبت خواسته‌شده برابر است با:

$$\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$$

۱۱۳ ۳ با توجه به رابطهٔ سرعت در مسابقهٔ اول داریم:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow\frac{v_A}{v_B}=\frac{\Delta x_A}{\Delta x_B}\times\frac{\Delta t_B}{\Delta t_A}$$

$$\xrightarrow{\Delta t_A=\Delta t_B}\frac{v_A}{v_B}=\frac{200}{160}=\frac{5}{4}\quad(*)$$

در مسابقهٔ دوم اگر هر دو دونده هم‌زمان با هم به نقطهٔ پایان برسند، آن‌گاه دوندهٔ B برندهٔ مسابقه نخواهد بود.

$$\frac{v_A}{v_B}=\frac{\Delta x'_A}{\Delta x'_B}\times\frac{\Delta t'_B}{\Delta t'_A}$$

$$\xrightarrow[(*)]{\Delta t'_B=\Delta t'_A}\frac{5}{4}=\frac{\Delta x'_A}{200}\Rightarrow\Delta x'_A=250m$$

اگر دوندهٔ A از ۵۰m عقب‌تر، مسابقه را شروع کند، با دوندهٔ B هم‌زمان به خط پایان می‌رسد و دوندهٔ B برندهٔ مسابقه نخواهد شد.

۱۱۴ ۱ با مقایسهٔ معادلهٔ سرعت ـ زمان داده‌شده با فرم کلی معادلهٔ سرعت ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$\begin{cases}v=-3t+12\\ v=at+v_0\end{cases}\Rightarrow a=-3\frac{m}{s^2}\ \text{و}\ v_0=12\frac{m}{s}$$

حال جابه‌جایی متحرک در ۱۰ ثانیهٔ نخست حرکتش برابر است با:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t=\frac{1}{2}\times(-3)\times(10)^2+12\times10=-30m$$

$$\Rightarrow x_{10s}-x_0=-30\Rightarrow 0-x_0=-30\Rightarrow x_0=30m$$

لحظهٔ تغییر جهت حرکت برابر است با: $v=-3t+12=0\Rightarrow t=4s$

حال به کمک رابطهٔ $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$، مکان متحرک را در لحظهٔ $t=4s$ به دست می‌آوریم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow x_4=\frac{1}{2}\times(-3)\times4^2+12\times4+30=54m$$

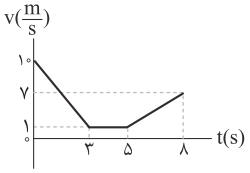
۱۱۵ ۴ ابتدا با استفاده از رابطهٔ شتاب متوسط، سرعت متحرک در لحظه‌های مختلف را به دست می‌آوریم:

$$0\le t\le 3s: a=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow -3=\frac{v_{3s}-10}{3}\Rightarrow v_{3s}=1\frac{m}{s}$$

$$3s\le t\le 5s: a=0\Rightarrow\text{حرکت سرعت ثابت}\Rightarrow v_{5s}=v_{3s}=1\frac{m}{s}$$

$$5s\le t\le 8s: a=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow 2=\frac{v_{8s}-1}{3}\Rightarrow v_{8s}=7\frac{m}{s}$$

بنابراین نمودار سرعت زمان حرکت داده‌شده به صورت زیر خواهد بود"



بررسی عبارت‌ها:

الف) سرعت متحرک همواره بزرگ‌تر از صفر است. پس هیچ‌گاه متوقف نشده است. (✗)

ب) در بازهٔ زمانی $t=0$ تا $t=3s$ حرکت کندشونده و در بازهٔ زمانی $t=5s$ تا $t=8s$ حرکت تندشونده است. (✓)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ج) طبق نمودار سرعت ـ زمان، سرعت متحرک هیچ‌گاه منفی نشده است، پس متحرک تغییر جهت نداده است. (✓)

د) می‌دانیم سطح زیر نمودار برابر با جابه‌جایی است، بنابراین:

$$\Delta x = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{(10+1)\times 3}{2} + 2\times 1 + \frac{(7+1)\times 3}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta x = 16/5 + 2 + 12 = 30/5\,m \ (\checkmark)$$

۱۱۶ ۲ رابطهٔ جابه‌جایی متحرک در ثانیهٔ nام حرکت برابر است با:

$$\Delta x_n = (n - 0/5)a + v_0 \xrightarrow{v_0 = 0} \Delta x_n = (n - 0/5)a$$

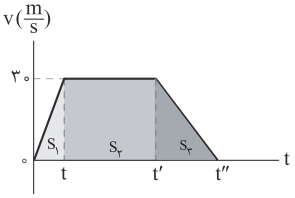
$$\Rightarrow 84 = (11 - 0/5)a \Rightarrow a = \frac{84}{10/5} = 8\,\frac{m}{s^2}$$

رابطهٔ جابه‌جایی در T ثانیهٔ nام برابر است:

$$\Delta x = (n - 0/5)aT^2 + v_0 T \xrightarrow{v_0 = 0} \Delta x = (5 - 0/5)8\times 4$$

$$\Rightarrow \Delta x_n = 4/5\times 8\times 4 = 144\,m$$

۱۱۷ ۳ با استفاده از سطح زیر نمودار سرعت ـ زمان می‌توان نوشت:



$$S_1 = x \Rightarrow \frac{30t}{2} = x \Rightarrow x = 15t$$

$$S_2 = 3x \Rightarrow \frac{30\times(t'-t)}{2} = 3x = 3\times 15t \Rightarrow 2t' - 2t = 3t$$

$$\Rightarrow 2t' = 5t \Rightarrow t' = 2/5t$$

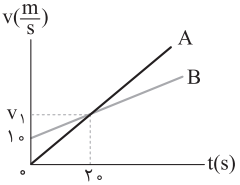
$$S_3 = 2x \Rightarrow \frac{30\times(t''-t')}{2} = 2x = 2\times 15t \Rightarrow t'' - 2/5t = 2t$$

$$\Rightarrow t'' = 4/5t$$

بنابراین سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{6x}{4/5t} = \frac{6\times 15t}{\frac{9}{2}t} = 20\,\frac{m}{s}$$

۱۱۸ ۱ می‌دانیم شیب نمودار سرعت ـ زمان برابر با شتاب است، بنابراین:



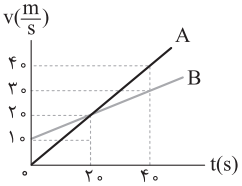
$$a_A = 2a_B \Rightarrow \frac{v_1}{20} = 2\times\frac{v_1 - 10}{20} \Rightarrow v_1 = 20\,\frac{m}{s}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} a_A = 1\,\frac{m}{s^2} \\ a_B = 0/5\,\frac{m}{s^2} \end{cases}$$

در ۲۰ ثانیهٔ اول، سرعت متحرک B بیشتر از سرعت متحرک A است و فاصلهٔ دو متحرک افزایش می‌یابد. از لحظهٔ $t = 20s$ به بعد، سرعت متحرک A بیشتر می‌شود و متحرک A به تدریج فاصله را جبران می‌کند تا دو متحرک به هم نزدیک شوند و پس از لحظهٔ $t = 40s$ به بعد، متحرک A جلو می‌زند و فاصله دوباره شروع به افزایش می‌کند، بنابراین بازهٔ زمانی موردنظر سؤال، بازهٔ زمانی $20s \le t < 40s$ است.

حال کافی است از مساحت زیر نمودار سرعت ـ زمان کمک بگیریم:



$$\begin{cases} \Delta x_A = \frac{20+40}{2}\times 20 = 600\,m \\ \Delta x_B = \frac{20+30}{2}\times 20 = 500\,m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta x_A + \Delta x_B = 1100\,m$$

۱۱۹ ۱ مدت‌زمان کل حرکت گلولهٔ (۱) را مشخص می‌کنیم:

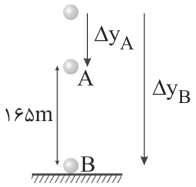
$$\Delta y_1 = -\frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow -180 = -5t_1^2 \Rightarrow t_1 = 6s$$

پس از ۲s، گلولهٔ (۱) ۴s فرصت دارد تا به زمین برسد و برای اینکه ۱s دیرتر به سطح زمین برسد باید گلولهٔ دوم از اینجا به بعد در طی ۳s مسیر خود را سقوط کند.

$$\Delta y_2 = -\frac{1}{2}gt_2^2 \Rightarrow \Delta y_2 = -5\times 3^2 = -45\,m$$

۱۲۰ ۴ مطابق شکل مقابل، ۱۶۵m آخر حرکتش، یعنی از نقطهٔ A تا نقطهٔ B:

$$\Delta y_A = -245 + 165 = -80\,m$$



سرعت گلوله در نقطهٔ A و سرعت گلوله در نقطهٔ B را محاسبه می‌کنیم:

$$v_A^2 = -2g\Delta y_A \Rightarrow v_A^2 = -2\times 10\times(-80)$$

$$\Rightarrow v_A = 40\,\frac{m}{s}$$

$$v_B^2 = -2g\Delta y_B \Rightarrow v_B^2 = -2\times 10\times(-245)$$

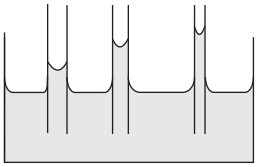
$$\Rightarrow v_B = 70\,\frac{m}{s}$$

چون شتاب حرکت ثابت است، سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av} = \frac{v_A + v_B}{2} = \frac{40+70}{2} = \frac{110}{2} = 55\,\frac{m}{s}$$

۱۲۱ ۳ می‌دانیم اگر چند لولهٔ مویین شیشه‌ای و تمیز را وارد یک ظرف آب کنیم، آب در لوله‌های مویین به صورتی بالا می‌رود که ارتفاع آب در لولهٔ مویین بالاتر از سطح آزاد آب داخل ظرف و به صورت فرورفته باشد، زیرا نیروی دگرچسبی بین مولکول‌های آب و شیشه از نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های آب بیشتر است.

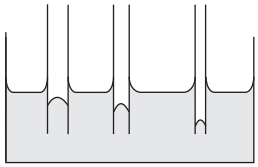
هم‌چنین هر چقدر قطر لولهٔ مویین کم‌تر باشد، ارتفاع ستون آب بیشتر است.



اگر داخل لوله‌ها را کمی چرب کنیم، نیروی دگرچسبی بین مولکول‌های آب و شیشه کاهش می‌یابد و کوچک‌تر از نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های آب می‌شود.

در این حالت مشاهده می‌کنیم که آب در لوله‌های مویین مقداری بالا می‌رود، ولی سطح آن پایین‌تر از سطح آزاد آب ظرف قرار می‌گیرد. هم‌چنین هر چه قطر لولهٔ مویین کم‌تر باشد، ارتفاع ستون آب در آن کم‌تر است. افزون بر این‌ها سطح آب در لولهٔ مویین برآمده است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir



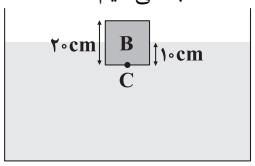
۱۲۲ | ۲ گام اول) ابتدا با توجه به رابطهٔ $F=PA$ و با داشتن اختلاف نیرو در وجه پایینی و وجه بالایی مکعب A، چگالی مایع را محاسبه می‌کنیم. توجه کنید که نیرو و در نتیجه فشار، در وجه پایینی بیشتر از وجه بالایی است:

$$F=PA\Rightarrow \Delta F=\Delta PA \xrightarrow{\Delta P=\rho g\Delta h} \Delta F=\rho g\Delta hA$$

$$\xrightarrow[\Delta h=۰/۲۵\,m,\ A=۰/۲۵\times ۰/۲۵\,m^۲]{\Delta F=۲۱۲۵\,N,\ g=۱۰\frac{N}{kg}} ۲۱۲۵=\rho\times ۱۰\times ۰/۲۵\times ۰/۲۵\times ۰/۲۵$$

$$\Rightarrow \rho=۱۳۶۰۰\frac{kg}{m^۳}$$

گام دوم) اکنون فشار را در وجه پایینی مکعب B محاسبه می‌کنیم:



$$\begin{cases} P_C=\rho gh_C+P_۰ \\ F'=P_CA' \end{cases}\Rightarrow F'=(\rho gh_C+P_۰)A'$$

$$\xrightarrow[h_C=۰/۱\,m\ ,\ P_۰=۹۶۴۰۰\,Pa\ ,\ A'=۰/۲\times ۰/۲\,m^۲]{\rho=۱۳۶۰۰\frac{kg}{m^۳},\ g=۱۰\frac{N}{kg}}$$

$$\Rightarrow F'=(۱۳۶۰۰\times ۱۰\times ۰/۱+۹۶۴۰۰)\times ۰/۰۴=(۱۳۶۰۰+۹۶۴۰۰)\times ۰/۰۴$$

$$\Rightarrow F'=۱۱۰۰۰\times ۰/۰۴=۴۴۰۰\,N$$

۱۲۳ | ۳ گام اول: فشار در کف ظرف، به شکل ظرف بستگی ندارد و از رابطهٔ $P=\rho gh$ به دست می‌آید. در نتیجه نیرویی که آب به کف ظرف وارد می‌کند، برابر $F=PA=\rho ghA$ است که در آن A مساحت کف ظرف است:

$$F=\rho g\times ۰/۱۵\times ۵۰\times ۱۰^{-۴}=\rho g\times ۷/۵\times ۱۰^{-۴}\,N$$

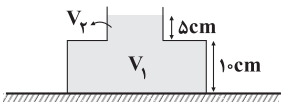
گام دوم: نیرویی که ظرف به سطح افقی زیر خود وارد می‌کند، مجموع وزن ظرف و وزن آب داخل آن است. با چشم‌پوشی از وزن ظرف، این نیرو برابر $F'=m_{آب}g$ است. بنابراین جرم آب داخل ظرف را محاسبه می‌کنیم:

$$m_{آب}=\rho V=\rho(V_۱+V_۲)=\rho(۰/۱\times ۵۰\times ۱۰^{-۴}+۰/۰۵\times ۲۰\times ۱۰^{-۴})$$

$$=\rho\times ۶\times ۱۰^{-۴}\,kg$$

$$F'=\rho g\times ۶\times ۱۰^{-۴}\,N$$

در نتیجه، داریم:



گام سوم: نسبت $\frac{F}{F'}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{F}{F'}=\frac{۷/۵\times ۱۰^{-۴}\rho g}{۶\times ۱۰^{-۴}\rho g}=\frac{۵}{۴}$$

۱۲۴ | ۳ اگر در ظرف‌هایی که سطح مقطع آن‌ها از بالا تا پایین، ثابت است (مانند استوانه، مکعب، مکعب‌مستطیل)، مایع بریزیم، نیرویی که مایع به کف ظرف وارد می‌کند برابر با وزن مایع است و فشار مایع در کف ظرف برابر است با:

$$F=mg$$

$$\rho=\frac{F}{A}=\frac{mg}{A}$$

گام اول: ابتدا فشار حاصل از دو مایع را در کف ظرف محاسبه می‌کنیم:

$$P_{مایع}=\frac{W_{آب}+W_{جیوه}}{A}=\frac{m_{آب}g+m_{جیوه}g}{A}$$

$$=\frac{(۴۵۰+۹۰۰)\times ۱۰^{-۳}\times ۱۰}{۵۰\times ۱۰^{-۴}}=۲۷۰۰\,Pa$$

گام دوم: خواستهٔ سؤال فشار در کف ظرف برحسب سانتی‌متر جیوه است، پس باید فشار حاصل از مایع‌ها را که در گام اول به دست آوردیم برحسب سانتی‌متر جیوه نوشته و در نهایت با فشار هوا جمع کنیم، یعنی:

$$P_{مایع}=\rho_{جیوه}gh_{جیوه}\Rightarrow h_{جیوه}=\frac{P_{مایع}}{\rho_{جیوه}g}$$

$$\Rightarrow h_{جیوه}=\frac{۲۷۰۰}{۱۳/۵\times ۱۰^{۳}\times ۱۰}=۰/۰۲\,m=۲\,cm$$

$$\Rightarrow P_{مایع}=۲\,cmHg$$

$$P_{کف\ ظرف}=P_{مایع}+P_۰=۲+۷۲=۷۴\,cmHg$$

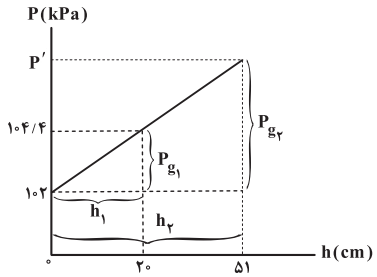
دام طراح: اگه ارتفاع جیوه رو به سانتی‌متر تبدیل نکنی و اشتباهاً فشار مایع بر کف ظرف رو برابر با $۰/۰۲\,cmHg$ در نظر بگیری، توی دام گزینهٔ (۱) می‌افتی.

۱۲۵ | ۳ می‌دانیم فشار پیمانه‌ای (P_g) برابر با $P-P_۰$ است که $P_۰$ فشار جو و P ناشی از مایع است. حالا با توجه به اطلاعات روی نمودار داریم:

$$\text{شیب نمودار}=\frac{P_{g_۱}}{h_۱}=\frac{P_{g_۲}}{h_۲}\Rightarrow\frac{۱۰۴/۴-۱۰۲}{۲۰}=\frac{P_{g_۲}}{۵۱}\Rightarrow P_{g_۲}=۶/۱۲\,kPa$$

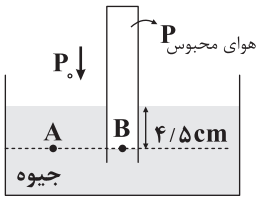
$$P_{g_۲}=\rho_{جیوه}.g.h_{جیوه}\Rightarrow ۶/۱۲\times ۱۰^{۳}=۱۳/۶\times ۱۰^{۳}\times ۱۰\times h_{جیوه}$$

$$\Rightarrow h_{جیوه}=۰/۰۴۵\,m=۴/۵\,cm$$



پس فشار پیمانه‌ای در عمق ۵۱ سانتی‌متر این مایع برابر با $۴/۵\,cmHg$ است.

۱۲۶ | ۲ گام اول) فشار در نقاط هم‌تراز A و B را برابر قرار می‌دهیم تا فشار هوا برحسب سانتی‌متر جیوه به دست آید:



$$P_A=P_B\Rightarrow P_۰+P_{جیوه}=P_{هوای\ محبوس}$$

$$\Rightarrow P_۰+۴/۵=۸۰\Rightarrow P_۰=۷۵/۵\,cmHg$$

گام دوم) با توجه به این‌که فشار برحسب سانتی‌متر جیوه با ارتفاع ستون جیوه برحسب سانتی‌متر برابر است، فشار هوا را برحسب پاسکال می‌نویسیم:

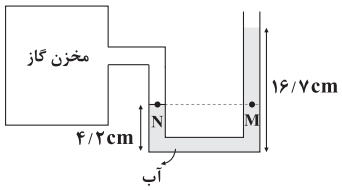
$$P_۰=\rho_{جیوه}gh_{جیوه}$$

$$\Rightarrow P_۰=۱۳۶۰۰\times ۱۰\times ۷۵/۵\times ۱۰^{-۲}=۱۰۲۶۸۰\,Pa$$

دام طراح: فشار هوای محبوس در لوله با فشار هوا برابر نیست و ۴/۵ سانتی‌متر جیوه هم تأثیرگذاره، اگه این اشتباه رو بکنی و فقط ۸۰ cmHg رو به پاسکال تبدیل کنی، توی دام گزینهٔ (۳) می‌افتی.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲۷ ۱ از برابری فشار در نقاط هم‌تراز داخل یک مایع ساکن، کمک می‌گیریم:



$$P_N = P_M \Rightarrow P_{\text{گاز}} = P_\circ + \rho gh$$

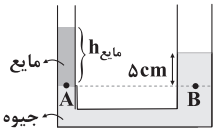
$$\Rightarrow P_g = P_{\text{گاز}} - P_\circ = \rho gh = 1\times10^3 \times 10 \times (16/7 - 4/2)\times10^{-2}$$

$$\Rightarrow P_g = 1250\ \text{Pa}$$

دام طراح: حواست به تبدیل یکاها باشه و هم‌چنین اختلاف فشار مخزن گاز و فشار هوا برابر با فشار حاصل از ۱۶/۷ − ۴/۲ سانتی‌متر آب است. اگه ارتفاع رو ۱۶/۷cm درنظر بگیری، سراغ گزینه‌های اشتباه (۳) و (۴) می‌ری.

۱۲۸ ۲ **مشاوره:** توی سؤالات مربوط به لوله‌های U‌شکل، بارومتر و مانومتر حتماً نقاط هم‌تراز بهت کمک می‌کنه، فقط سعی کن نقاطی را انتخاب کنی که محاسبات رو کم‌تر می کنه.

گام اول) با توجه به این‌که فشار در نقاط هم‌تراز داخل یک مایع ساکن، یکسان است، داریم:



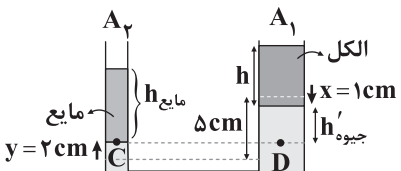
$$P_A = P_B \Rightarrow \rho_{\text{مایع}} g h_{\text{مایع}} + P_\circ = \rho_{\text{جیوه}} g h_{\text{جیوه}} + P_\circ$$

$$\Rightarrow \rho_{\text{مایع}} h_{\text{مایع}} = \rho_{\text{جیوه}} \times 5 \quad (1)$$

گام دوم) وقتی در شاخهٔ سمت راست، الکل بریزیم جیوه در شاخهٔ سمت راست به اندازهٔ $x = 1\text{cm}$ پایین رفته و در شاخهٔ سمت چپ به اندازهٔ y بالا می‌رود. چون حجم جیوهٔ جابه‌جا شده در دو شاخه برابر است، داریم:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow xA_1 = yA_2 \xrightarrow[x=1\text{cm}]{A_1 = 2A_2} y = 2\text{cm}$$

گام سوم) با مساوی قرار دادن فشار در نقاط هم‌تراز C و D، داریم:



$$P_C = P_D \Rightarrow \rho_{\text{مایع}} g h_{\text{مایع}} + P_\circ = \rho_{\text{جیوه}} g h'_{\text{جیوه}} + \rho_{\text{الکل}} g h + P_\circ$$

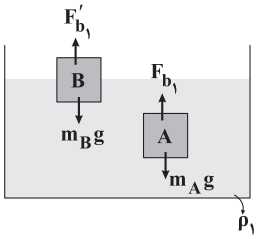
$$\Rightarrow \rho_{\text{مایع}} h_{\text{مایع}} = \rho_{\text{جیوه}} h'_{\text{جیوه}} + \rho_{\text{الکل}} h$$

$$\xrightarrow{(1)} \rho_{\text{جیوه}} \times 5 = \rho_{\text{جیوه}} h'_{\text{جیوه}} + \rho_{\text{الکل}} h$$

$$\xrightarrow[\rho_{\text{الکل}} = 0/8\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}]{\rho_{\text{جیوه}} = 13/6\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3},\ h'_{\text{جیوه}} = 2\text{cm}} 13/6\times5 = 13/6\times2 + 0/8h$$

$$\Rightarrow 13/6\times3 = 0/8h \Rightarrow h = \frac{13/6\times3}{0/8} = 51\text{cm}$$

۱۲۹ ۳ **گام اول:** جسم‌های A و B مطابق شکل زیر در مایع (۱) قرار دارند.



$m_A g = F_{b_1}$, $\rho_A = \rho_1$: جسم A غوطه‌ور است.

$m_B g = F'_{b_1}$, $\rho_B < \rho_1$: جسم B شناور است.

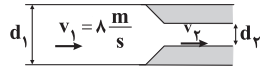
گام دوم: در حالت دوم که جسم‌ها در مایعی با چگالی بیشتر قرار می‌گیرند، جسم B هم‌چنان شناور باقی ماند و جسم A شروع به حرکت به سمت بالا می‌کند تا در نهایت روی سطح مایع (۲) شناور شود، یعنی در حالت تعادل، هر دو جسم روی سطح مایع (۲) شناور می‌شوند. پس:

$$\begin{cases} m_A g = F_{b_2} \\ m_B g = F'_{b_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{b_1} = F_{b_2} \\ F'_{b_1} = F'_{b_2} \end{cases}$$

در مایع (۲) نیروی شناوری با نیروی وزن جسم‌ها برابر است.

از گام اول و دوم می‌توان نتیجه گرفت که نیروی شناوری در هر دو مایع ثابت است.

۱۳۰ ۴ **گام اول)** با توجه به اطلاعات صورت سؤال، داریم:



$$d_2 = d_1 - 0/2d_1 = 0/8d_1$$

گام دوم) با استفاده از معادلهٔ پیوستگی، داریم:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \xrightarrow{A = \pi\frac{d^2}{4}} d_1^2 v_1 = d_2^2 v_2 \xrightarrow[v_1 = 8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}]{d_2 = 0/8d_1}$$

$$d_1^2 \times 8 = (0/8d_1)^2 \times v_2 \Rightarrow 8 = 0/64 v_2$$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{8}{0/64} = \frac{1}{0/08} = 12/5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

گام سوم) طبق اصل برنولی، برای شاره‌ای که به طور لایه‌ای و در امتداد افق حرکت می‌کند، در مسیر حرکت شاره، با افزایش تندی شاره، فشار آن کاهش می‌یابد. بنابراین در قسمت خروجی لوله که تندی مایع بیشتر است، فشار آن کم‌تر است.

۱۳۱ ۲ از ترکیب دو رابطهٔ $C = \frac{Q}{V}$ و $C = \kappa\varepsilon_\circ \frac{A}{d}$ داریم:

$$\kappa\varepsilon_\circ \frac{A}{d} = \frac{Q}{V} \Rightarrow V = \frac{Qd}{\kappa\varepsilon_\circ A} = \frac{72\times10^{-9}\times0/5\times10^{-3}}{8\times9\times10^{-12}\times100\times10^{-4}} = 50\text{V}$$

۱۳۲ ۳ **گام اول)** رابطهٔ انرژی پتانسیل خازن $(U = \frac{Q^2}{2C})$ را به صورت نسبتی می‌نویسیم:

$$\frac{U_A}{U_B} = \left(\frac{Q_A}{Q_B}\right)^2 \times \frac{C_B}{C_A} \Rightarrow 4 = 1\times\frac{C_B}{C_A} \Rightarrow \frac{C_B}{C_A} = 4 \Rightarrow C_A = \frac{1}{4}C_B$$

گام دوم) با توجه به برابر بودن بار خازن‌ها، نسبت اختلاف پتانسیل دو خازن را به دست می‌آوریم:

$$Q_A = Q_B \xrightarrow{Q=CV} C_A V_A = C_B V_B \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{C_B}{C_A} = 4$$

گام سوم) طبق رابطهٔ $E = \frac{V}{d}$ و با توجه به یکسان بودن فاصلهٔ صفحات در هر دو خازن، داریم:

$$\frac{E_A}{E_B} = \frac{V_A}{V_B} \times \frac{d_B}{d_A} = 4\times1 = 4$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۳۳ **۲** خازن به باتری وصل نیست، پس بار روی صفحات ثابت و بدون تغییر است. (ثابت: Q)

عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم:

الف) با قرار دادن یک دی‌الکتریک بین صفحه‌های خازن، ظرفیت خازن افزایش پیدا می‌کند و از آن‌جایی که بار ثابت است، پس $U \propto \frac{1}{C}$، در نتیجه انرژی خازن کاهش می‌یابد.

ب و ج) طبق رابطهٔ $C = \kappa\varepsilon_0 \frac{A}{d}$، ظرفیت خازن با d رابطهٔ عکس دارد و چون سایر پارامترها ثابت است. پس:

$$C \propto \frac{1}{d}$$

برای بررسی تغییرات انرژی خازن از رابطهٔ زیر کمک می‌گیریم:

$$U = \frac{Q^2}{2C} \xrightarrow{Q:\text{ثابت}} U \propto \frac{1}{C} \xrightarrow{C \propto \frac{1}{d}} U \propto d$$

یعنی برای کاهش انرژی خازن، باید فاصلهٔ بین صفحات را کاهش دهیم. بنابراین عبارت‌های «الف» و «ب»، باعث کاهش انرژی خازن می‌شود.

۱۳۴ **۱** **مشاوره:** در رابطه با جهت جریان، میدان و سرعت سوق، متن کتاب درسی و شکل‌های مربوط به آن را دقیق مطالعه کنید.

در یک رسانا الکترون‌ها با سرعتی موسوم به سرعت سوق در خلاف جهت میدان حرکت می‌کنند. هم‌چنین جهت قراردادی جریان الکتریکی I، هم‌جهت با میدان الکتریکی و در خلاف جهت سوق الکترون‌هاست.

بریم سراغ متن سؤال:

چون سرعت سوق در خلاف جهت میدان و جریان است، در نتیجه میدان الکتریکی و جریان الکتریکی هم‌جهت هستند.

می‌دانیم جهت میدان الکتریکی و جهت جریان از پتانسیل بیش‌تر به کم‌تر است. پس جهت سوق الکترون‌ها از پتانسیل کم‌تر به بیش‌تر است.

۱۳۵ **۳** **گام اول)** ابتدا به کمک رابطهٔ $\Delta V = \frac{\Delta U}{\Delta q}$، بار الکتریکی عبوری را به دست می‌آوریم:

$$\Delta q = \frac{\Delta U}{\Delta V} = \frac{4\times10^9}{80\times10^6} = 50\,C$$

گام دوم) فقط کافی است داده‌ها را در رابطهٔ جریان قرار دهیم:

$$I_{av} = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{50}{0/5} = 100\,A$$

گام سوم) توان الکتریکی برابر با نسبت انرژی آزادشده به زمان آن است. پس:

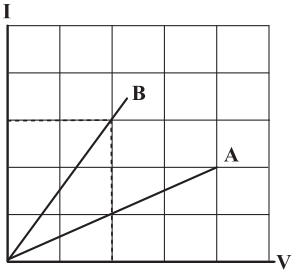
$$P_{av} = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{4\times10^9}{0/5} = 8\times10^9\,W$$

دام طراح: اگه Δq رو با I اشتباه بگیری، توی دام گزینهٔ (۱) می‌افتی.

۱۳۶ **۳** **گام اول)** به کمک نمودار، نسبت مقاومت‌ها را به دست می‌آوریم:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow \frac{R_A}{R_B} = \frac{V_A}{V_B} \times \frac{I_B}{I_A} = 1\times\frac{3}{1} = 3$$

$$\Rightarrow R_A = 3R_B \quad (*)$$



گام دوم) طبق صورت سؤال، یکی از مقاومت‌ها ۱۰Ω بیشتر از دیگری است، یعنی:

$$R_A = R_B + 10 \xrightarrow{(*)} R_A = \frac{R_A}{3} + 10 \Rightarrow R_A = 15\Omega$$

۱۳۷ **۴** دقت کنید که چون رسانا ثابت است، پس:

$$\begin{cases} \rho = \rho_0[1+\alpha(T-T_0)] \Rightarrow R = R_0[1+\alpha(T-T_0)] \\ R = \frac{80}{100}R_0 = 0/8R_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0/8R_0 = R_0(1+\alpha\Delta T) \Rightarrow 0/8 = 1+\alpha\Delta T$$

$$\Rightarrow -0/2 = 2\times10^{-3}\times\Delta T \Rightarrow \Delta T = -100K$$

پس باید **دما را ۱۰۰ کلوین کاهش دهیم.**

۱۳۸ **۱** مقدار مقاومت (بدون تلرانس) از رابطهٔ $R = \overline{ab}\times10^n$ که در آن a عدد نوار اول از چپ، b عدد نوار دوم از چپ و n عدد نوار سوم از چپ می‌باشد، به دست می‌آید:

$$\begin{cases} a = 6 \\ b = 4 \Rightarrow R = 64\times10^2 = 6400\Omega \\ n = 2 \end{cases}$$

تلرانس ۱۰٪ است، یعنی: $\text{تلرانس} = \frac{10}{100}\times6400 = 640$

پس مقاومت ترکیبی بین دو عدد ۶۴۰−۶۴۰۰ و ۶۴۰+۶۴۰۰ است، یعنی:

$$R_{min} = 5760\Omega$$

$$R_{max} = 7040\Omega$$

درنتیجه گزینهٔ (۱) نادرست است.

۱۳۹ **۳** چون دما با مقاومت رابطهٔ خطی دارد، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{\Delta R_1}{\Delta\theta_1} = \frac{\Delta R_2}{\Delta\theta_2} \Rightarrow \frac{222-160}{100-0} = \frac{346-160}{\theta-0}$$

$$\frac{62}{100} = \frac{186}{\theta} \Rightarrow \theta = \frac{186\times100}{62} = 300$$

دقت: گسترهٔ دمایی این دماسنج در محدودهٔ ۱۴K تا ۱۲۳۵K است و گزینهٔ (۴) صحیح نمی‌باشد.

۱۴۰ **۱** با توجه به رابطهٔ چگالی (ρ') داریم (چگالی را با ρ' و مقاومت ویژه را با ρ نشان داده‌ایم.):

$$\rho' = \frac{m}{V} = \frac{m}{AL} \xrightarrow{m_1=m_2} \frac{\rho'_2}{\rho'_1} = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)\left(\frac{L_1}{L_2}\right) \xrightarrow{\rho'_1=2\rho'_2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{A_1L_1}{A_2L_2} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{L_2}{L_1}\right) \quad (*)$$

حال با توجه به رابطهٔ مقاومت، نسبت $\frac{L_1}{L_2}$ را به دست می‌آوریم:

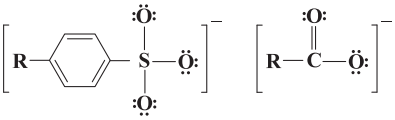
$$R = \rho\frac{L}{A} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\left(\frac{L_2}{L_1}\right)\left(\frac{A_1}{A_2}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{رابطهٔ }(*)]{R_1=R_2,\ \rho_1=8\rho_2} 1 = \frac{1}{16}\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{4}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

شیمی

۱۴۱ **۲** در ساختار صابون و پاک‌کننده‌های غیرصابونی به ترتیب ۵ و ۹ جفت‌الکترون ناپیوندی وجود دارد: $۹-۵=۴$



۱۴۲ **۲** معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش موردنظر به صورت زیر است:

$$C_{۵۷}H_{۱۰۴}O_۶ + ۳H_۲O \rightarrow C_۳H_۵(OH)_۳ + ۳C_{۱۷}H_{۳۳}COOH$$

$$\frac{x\,g\,C_{۵۷}H_{۱۰۴}O_۶}{۱\times ۸۸۴} = \frac{۴/۵۱۵\times ۱۰^{۲۴}\,molecule\,C_۳H_۵(OH)_۳}{۱\times ۶/۰۲\times ۱۰^{۲۳}}$$

$$\Rightarrow x = ۶۶۳۰\,g \text{ یا } ۶/۶۳\,kg$$

۱۴۳ **۱** **بررسی موارد:**

• جرم مولی اوره $(CO(NH_۲)_۲)$ و اتیلن گلیکول $(C_۲H_۴(OH)_۲)$ به ترتیب برابر با ۶۰ و ۶۲ گرم بر مول است.

• اتیلن گلیکول به طور نامحدود در آب حل می‌شود. بنابراین انحلال‌پذیری اوره در آب، نمی‌تواند بیش‌تر، از انحلال‌پذیری اتیلن گلیکول در آب باشد.

•• با توجه به ساختارهای زیر شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی در اوره و اتیلن گلیکول به ترتیب برابر با ۸ و ۹ و شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در این دو ترکیب به ترتیب برابر با ۴ و ۴ است:



۱۴۴ **۳** عسل حاوی مولکول‌های قطبی است که در ساختار خود، شمار قابل‌توجهی گروه هیدروکسیل $(-OH)$ دارند.

۱۴۵ **۳** معادلهٔ واکنش انجام‌شده به صورت زیر است:

$$۲C_nH_{۲n+۱}COONH_۴ + MgCl_۲ \rightarrow (C_nH_{۲n+۱}COO)_۲Mg + ۲NH_۴Cl$$

[رسوب]

$$\frac{\text{۳۲/۹ صابون}\times\frac{۷۵}{۱۰۰}\times\frac{۸۰}{۱۰۰}}{۲\times M} = \frac{۰/۰۳\,mol}{۱} \Rightarrow M = ۳۲۹\,g.mol^{-۱}$$

$$C_nH_{۲n+۱}COONH_۴ : ۳۲۹\,g.mol^{-۱} \Rightarrow ۱۲(n+۱)+۲n+۵+۳۲+۱۴ = ۳۲۹\,g.mol^{-۱} \Rightarrow n = ۱۹$$

بنابراین فرمول صابون $C_{۱۹}H_{۳۹}COONH_۴$ بوده و شمار اتم‌های هیدروژن در فرمول آن برابر با ۴۳ است.

۱۴۶ **۲** معادلهٔ موازنه‌شدهٔ هر چهار واکنش در زیر آمده است:

$$K_۲O(s) + H_۲O(l) \rightarrow ۲K^+(aq) + ۲OH^-(aq)$$

$$BaO(s) + H_۲O(l) \rightarrow Ba^{۲+}(aq) + ۲OH^-(aq)$$

$$SO_۳(g) + H_۲O(l) \rightarrow ۲H^+(aq) + SO_۴^{۲-}(aq)$$

$$N_۲O_۵(s) + H_۲O(l) \rightarrow ۲H^+(aq) + ۲NO_۳^-(aq)$$

۱۴۷ **۳** **بررسی عبارت‌های نادرست:**

آ) شواهد بسیاری در تاریخ علم وجود دارد که نشان می‌دهند پیش از آن‌که ساختار اسیدها و بازها شناخته شود، شیمی‌دان‌ها افزون بر ویژگی‌های اسیدها و بازها با برخی واکنش‌های آن‌ها نیز آشنا بودند.

ب) فلزهای قلیایی و قلیایی خاکی (به‌جز Be) جزء بازهای آرنیوس هستند.

۱۴۸ **۴** مخلوط‌های X، Y و Z به ترتیب کلوئید، محلول و سوسپانسیون هستند. هر چند که ضدیخ (مخلوط اتیلن گلیکول و آب) نوعی محلول است، اما ذره‌های سازندهٔ آن، مولکول‌ها هستند، نه یون‌ها!!

۱۴۹ **۴** **بررسی سایر گزینه‌ها:**

۱) صابون مراغه افزودنی شیمیایی ندارد.

۲) صابون مراغه به دلیل خاصیت بازی مناسب برای موهای چرب استفاده می‌شود.

۳) برای تهیهٔ صابون مراغه، چربی حیوانی (پیهٔ گوسفند) و سود سوزآور را در دیگ‌های بزرگ با آب برای چندین ساعت می‌جوشانند و پس از قالب‌گیری، آن‌ها را در آفتاب خشک می‌کنند.

۱۵۰ **۴** با توجه به وجود ۳ پیوند دوگانه در حلقهٔ بنزنی، می‌توان نتیجه گرفت که زنجیر هیدروکربنی شامل یک پیوند دوگانهٔ $C=C$ است:

$$C_nH_{۲n-۱}C_۶H_۴SO_۳Na$$

$$\frac{\text{جرم C}}{\text{جرم O}} = ۵/۲۵ \Rightarrow \frac{۱۲(n+۶)}{۳\times ۱۶} = ۵/۲۵ \Rightarrow n = ۱۵$$

$$C_{۱۵}H_{۲۹}C_۶H_۴SO_۳Na$$

$$\frac{\text{جرم گوگرد}}{\text{جرم هیدروژن}} = \frac{۱\times ۳۲}{(۲۹+۴)\times ۱} \simeq ۰/۹۷$$

۱۵۱ **۴** **بررسی سایر گزینه‌ها:**

۱) اغلب داروها ترکیب‌هایی با خاصیت **اسیدی یا بازی** هستند.

۲) برای **کاهش میزان اسیدی بودن** خاک به آن آهک می‌افزایند.

۳) ورود فاضلاب‌های صنعتی به محیط‌زیست سبب **تغییر** pH می‌شود.

۱۵۲ **۲** **بررسی عبارت‌های نادرست:**

پ) بازها در سطح پوست همانند صابون، احساس لیزی ایجاد می‌کنند، اما به آن نیز آسیب می‌رسانند.

ت) دلیل سوزش معده که درد شدیدی در ناحیهٔ سینه ایجاد می‌کند، برگشت مقداری از محتویات اسیدی معده به لولهٔ مری است.

۱۵۳ **۳** **بررسی عبارت‌های نادرست:**

آ) محلول هیدروکلریک اسید با نام تجاری **جوهر نمک** شناخته می‌شود.

پ) یاخته‌های دیوارهٔ معده با ورود موادغذایی به آن، هیدروکلریک اسید ترشح می‌کنند. این اسید افزون بر فعال کردن آنزیم‌ها برای تجزیهٔ مواد غذایی، جانداران ذره‌بینی موجود در غذا را نیز از بین می‌برد.

۱۵۴ **۲** معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش موردنظر به صورت زیر است:

$$۲NaOH(s) + ۲Al(s) + ۶H_۲O(l) \rightarrow ۲NaAl(OH)_۴(aq) + ۳H_۲(g)$$

بررسی گزینه‌ها:

۱) این واکنش گرماده بوده و با انتقال گرما از سامانهٔ واکنش به محیط، همراه است.

۲) مجموع ضرایب اجزای واکنش برابر است با:

$$۲+۲+۶+۲+۳=۱۵$$

۳) در این واکنش، گاز هیدروژن تولید می‌شود.

۴) این پاک‌کننده برای بازکردن مجاری مسدودشده در برخی وسایل و دستگاه‌های صنعتی استفاده می‌شود.

۱۵۵ **۴** **بررسی گزینه‌ها:**

۱) اندازهٔ ذره‌های سازندهٔ کلوئیدها، متفاوت است.

۲) محلول سود و سفیدکننده‌ها علاوه بر برهم‌کنش با ذره‌های آلاینده، آن‌ها واکنش می‌دهند.

۳) **اغلب** موادی که در زندگی روزانه با آن‌ها سر و کار داریم، از مخلوط دو یا چند ماده تشکیل شده‌اند.

۴) در بخش قطبی اسیدهای چرب همانند بخش قطبی استرهای سنگین، پیوند دوگانهٔ $C=O$ وجود دارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵۶ **۲** در اثر انتقال الکترون از لایهٔ ششم به لایهٔ اول، ۱۵ پرتو تشکیل می‌شود:

• شمار پرتوهای فروسرخ برابر با ۶ است:

$n=۶\to n=۳$ $n=۵\to n=۳$ $n=۴\to n=۳$
$n=۶\to n=۴$ $n=۵\to n=۴$
$n=۶\to n=۵$

• شمار پرتوهای مرئی برابر با ۴ است:

$n=۶\to n=۲, n=۵\to n=۲, n=۴\to n=۲, n=۳\to n=۲$

• شمار پرتوهای فرابنفش برابر با ۵ است:

$n=۶\to n=۱$ $n=۳\to n=۱$
$n=۵\to n=۱$ $n=۲\to n=۱$
$n=۴\to n=۱$

۱۵۷ **۳** عنصرهای موردنظر عبارت‌اند از: $_{۱۹}K$ ، $_{۲۴}Cr$ و $_{۲۹}Cu$.

بررسی گزینه‌ها:

۱) شمار عنصرهایی که آرایش الکترونی اتم آن‌ها به $۴s^۲$ ختم می‌شود برابر با ۹ عنصر است:

$_{۲۰}Ca, _{۲۱}Sc, _{۲۲}Ti, _{۲۳}V, _{۲۵}Mn, _{۲۶}Fe, _{۲۷}Co, _{۲۸}Ni, _{۳۰}Zn$

۲) K ، Cr و Cu به ترتیب در گروه‌های ۱، ۶ و ۱۱ جدول جای دارند.
مجموع این سه عدد برابر با ۱۸ است. عنصر He نیز متعلق به گروه ۱۸ است.

۳) مجموع n و l آخرین الکترون واردشده به اتم عنصرهای Cr و Cu برابر با ۵ است.

۴) نماد شیمیایی پتاسیم (K) تک‌حرفی و دو عنصر دیگر (Cu و Cr) دوحرفی است.

۱۵۸ **۲** در بین ۲۰ عنصر نخست جدول دوره‌ای که اتم آن‌ها فاقد الکترونی با $l=۲$ است، در آرایش الکترونی اتم ۳ عنصر (He ، N و P)، دو الکترون جفت‌شده (یک جفت الکترون) وجود دارد.

$\frac{۳}{۲۰}\times ۱۰۰=٪ ۱۵$

۱۵۹ **۴** عنصرهای A ، B ، D ، E ، G و M به ترتیب $_{۶}C$ ، $_{۱۲}Mg$ ، $_{۲۴}Cr$ ، $_{۲۸}Ni$ ، $_{۳۴}Se$ و $_{۵۵}Cs$ هستند.

برای تشکیل هر مول ترکیب یونی دوتایی حاصل از Cs و Se همانند ترکیب یونی حاصل از Mg و Se، دو مول الکترون مبادله می‌شود:

$MgSe: ۱Mg^{۲+}, ۱Se^{۲-}$ $Cs_۲Se: ۲Cs^{۲+}, ۱Se^{۲-}$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) تفاوت عدد اتمی $_{۵۵}Cs$ و $_{۳۴}Se$ برابر با $۵۵-۳۴=۲۱$ است. عدد اتمی نخستین عنصر دستهٔ d جدول تناوبی نیز برابر با ۲۱ است.

۲) آرایش الکترونی اتم‌های C ، Ni و Mg به ترتیب به زیرلایه‌های $۲p^۲$ ، $۴s^۲$ و $۳s^۲$ ختم می‌شود.

۳) شمار الکترون‌های ظرفیتی اتم‌های C ، Ni ، Mg ، Cs ، Cr و Se به ترتیب با ۴، ۱۰، ۲، ۱، ۶ و ۶ است:

$۴+۱۰+۲+۱+۶+۶=۲۹$

نخستین عنصر جدول تناوبی که اتم آن دارای ۱۰ الکترون با $l=۲$ است، اتم $_{۲۹}Cu$ است.

۱۶۰ **۴** • در دورهٔ چهارم جدول تناوبی، آرایش الکترونی اتم ۱۰ عنصر زیر به زیرلایه‌ای با دو الکترون ($۴s^۲$ یا $۴p^۲$) ختم می‌شود:

$_{۲۰}Ca, _{۲۱}Sc, _{۲۲}Ti, _{۲۳}V, _{۲۵}Mn, _{۲۶}Fe, _{۲۷}Co, _{۲۸}Ni, _{۳۰}Zn, _{۳۲}Ge$

• در دورهٔ چهارم جدول تناوبی، آرایش الکترونی اتم ۴ عنصر زیر به زیرلایه‌ای با یک الکترون ($۴s^۱$ یا $۴p^۱$) ختم می‌شود:

$_{۱۹}K, _{۲۴}Cr, _{۲۹}Cu, _{۳۱}Ge$

بنابراین نسبت موردنظر برابر است با:

$\frac{۱۰}{۴}=۲/۵$

۱۶۱ **۳** مطابق داده‌های سؤال آرایش الکترونی یون $M^{۳+}$ به $۳d^۳$ ختم می‌شود. بنابراین آرایش الکترونی اتم عنصر M به صورت زیر است:

$_{۲۴}M: ۱s^۲, ۲s^۲, ۲p^۶, ۳s^۲, ۳p^۶, ۳d^۵, ۴s^۱$

بررسی گزینه‌ها:

۱) عنصر M در گروه ۶ جدول جای داشته و اعداد اتمی سایر عناصر موجود در این گروه برابر با ۴۲، ۷۴ و ۱۰۶ است:

$۴۲+۷۴+۱۰۶=۲۲۲$

۲) در اتم M شمار الکترون‌های با $l=۰$ (زیرلایهٔ s) و با $l=۱$ (زیرلایهٔ p) به ترتیب برابر با ۷ و ۱۲ است:

$۱۲-۷=۵$

۳)

$_{۲۴}M^{۲+}\begin{cases}p=۲۴\\e=۲۴-۲=۲۲\Rightarrow n=۲۸\\n-e=۶\end{cases}$

شمار ذره‌های زیراتمی درون‌هسته یا همان عدد جرمی برابر است با:

$p+n=۲۴+۲۸=۵۲$

۴) عنصر M $_{۲۴}$ در دورهٔ چهارم و گروه ششم جدول و عنصر $_{۴۱}Nb$ در دورهٔ پنجم و گروه پنجم جدول جای دارد:

$۴+۶=۵+۵$

۱۶۲ **۲** زیرلایه‌های $l=۱$ و $l=۰$ به ترتیب همان زیرلایه‌های p و s هستند. با توجه به فرض سؤال و آرایش الکترونی‌های زیر، عنصرهای A و X به ترتیب F و Al هستند:

$_۹F: ۱s^۲\ ۲s^۲\ ۲p^۵$

$_{۱۳}Al: ۱s^۲\ ۲s^۲\ ۲p^۶\ ۳s^۲\ ۳p^۱$

فرمول شیمیایی ترکیب مورد نظر $AlF_۳$ یا همان $XA_۳$ است که یک ترکیب یونی محسوب می‌شود.

۱۶۳ **۲** سه عنصر اصلی دارای ویژگی موردنظر هستند:

$_{۱۰}Ne: ۱s^۲\ ۲s^۲\ ۲p^۶ : \frac{l=۱}{l=۰}=\frac{۶}{۲+۲}=۱/۵$

$_{۱۵}P: ۱s^۲\ ۲s^۲\ ۲p^۶\ ۳s^۲\ ۳p^۳ : \frac{l=۱}{l=۰}=\frac{۶+۳}{۲+۲+۲}=۱/۵$

$_{۲۰}Ca: ۱s^۲\ ۲s^۲\ ۲p^۶\ ۳s^۲\ ۳p^۶\ ۴s^۲ : \frac{l=۱}{l=۰}=\frac{۶+۶}{۲+۲+۲+۲}=۱/۵$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱۶۴ **۴** ۱) هلیم ($_۲He$) با این‌که واکنش‌ناپذیر است، اما اتم آن، ۲ الکترون ظرفیتی دارد.

۲) با توجه به ساختارهای لوویس زیر، مقایسه میان شمار الکترون‌های اشتراکی در فضای اطراف هستهٔ دو اتم مولکول‌های مورد نظر به صورت $Cl_۲ < O_۲ < N_۲$ است:

$:\ddot{Cl}—\ddot{Cl}:$ $:\ddot{O}=\ddot{O}:$ $:N\equiv N:$

۳) آرایش الکترونی اتم هر کدام از عنصرهای Be و $_۲He$ به $ns^۲$ ختم می‌شود، اما آرایش الکترون ـ نقطه‌ای آن‌ها متفاوت است:

$:He$ $\cdot\dot{B}e$

۱۶۵ **۱** مطابق داده‌های سؤال آرایش الکترونی اتم A به یکی از دو زیرلایه $۳p$ یا $۴s$ و آرایش الکترونی اتم X به یکی از دو زیرلایه $۵p$ یا $۶s$ ختم می‌شود. کم‌ترین عدد اتمی برای A و X به ترتیب ۱۳ ($۳p^۱$) و ۴۹ ($۵p^۱$) و بیش‌ترین عدد اتمی برای A و X به ترتیب ۳۰ ($۴s^۲$) و ۸۰ ($۶s^۲$) است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

$$\left.\begin{matrix} a=۴۹-۳۰=۱۹ \\ b=۸۰-۱۳=۶۷ \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+b=۶۷+۱۹=۸۶$$

۱۶۶ **۲** آرایش الکترونی اتم $_{۸۰}Hg$ به صورت زیر است:

$$_{۸۰}Hg:[Xe]۴f^{۱۴}۵d^{۱۰}۶s^{۲}$$

بررسی عبارت‌ها:

آ) اتم $_{۸۰}Hg$ در گروه دوازدهم جدول دوره‌ای جای دارد.

ب) در اتم $_{۸۰}Hg$، شمار الکترون‌های با $l=۰$، $l=۲$ و $l=۳$ به ترتیب برابر با ۱۲، ۳۰ و ۱۴ الکترون است:

$$\begin{cases} ۱s^{۲},۲s^{۲},۳s^{۲},۴s^{۲},۵s^{۲},۶s^{۲} \\ ۴f^{۱۴} \\ ۳d^{۱۰},۴d^{۱۰},۵d^{۱۰} \end{cases} \Rightarrow \frac{(۱۲+۳۰)}{۱۴}=۳$$

پ) به آرایش الکترونی اتم $_{۸۰}Hg$ که در بالا آمده است، نگاه کنید. در آرایش الکترونی فشردهٔ آن از نماد سه زیرلایه استفاده شده است.

ت)

$$_{۸۰}^{۲۰۰}Hg \begin{cases} p=۸۰ \\ e=۸۰ \\ n=۲۰۰-۸۰=۱۲۰ \end{cases} \Rightarrow n-e=۱۲۰-۸۰=۴۰$$

در جدول تناوبی، شمار عنصرهای دستهٔ d که در دوره‌های چهارم تا هفتم جای دارند برابر با ۴۰ عنصر است.

۱۶۷ **۱** مطابق داده‌های سؤال A در گروه دوم جدول تناوبی جای داشته و کاتیون $A^{۲+}$ تشکیل می‌دهد. X نیز متعلق به گروه شانزدهم جدول تناوبی بوده و آنیون $X^{۲-}$ تشکیل می‌دهد. بنابراین فرمول ترکیب یونی دوتایی آن‌ها به صورت AX بوده و هر مول از این ترکیب، بر اثر مبادلهٔ ۲ مول الکترون تشکیل شده است:

شمار الکترون مبادله شده جرم ترکیب (g)AX

$$\begin{bmatrix} M & ۲\times۶/۰۲\times۱۰^{۲۳} \\ ۴/۰۳ & ۶/۷۴\times۱۰^{۲۲} \end{bmatrix} \Rightarrow M\simeq ۷۲g.mol^{-۱}$$

۱۶۸ **۴** **بررسی سایر گزینه‌ها:**

۱) الکترون در هر لایه‌ای که باشد، **در همهٔ نقاط پیرامون هسته** می‌تواند حضور یابد.

۲) در لایهٔ الکترونی nاُم، حداکثر شمار زیرلایه‌ها برابر با n و حداکثر شمار الکترون‌ها برابر با $۲n^{۲}$ است.

۳) پایداری الکترون‌ها در اتم با افزایش فاصله از هسته، **کاهش** می‌یابد.

۱۶۹ **۴** **بررسی گزینه‌ها:**

۱) به عنوان نمونه اتم‌های D و X می‌توانند عنصرهای $_{۴۰}Zr$ و $_{۵۲}Te$ باشند که در دورهٔ پنجم جدول جای داشته و لایهٔ ظرفیت اتم هر کدام از آن‌ها شامل ۲ زیرلایه است.

۲ و ۳) به عنوان نمونه D و X می‌توانند عنصرهای $_{۵۸}Ce$ و $_{۷۰}Yb$ باشند که هر کدام از آن‌ها متعلق به دستهٔ f بوده و آرایش الکترونی اتم هر کدام از آن‌ها به زیرلایهٔ $۶s^{۲}$ ختم می‌شود.

۴) با توجه به این‌که تفاوت عدد اتمی دو عنصر هم‌دورهٔ D و X برابر ۱۲ است، حداقل شماره دورهٔ آن‌ها برابر با ۴ بوده و نخستین عنصر این دوره دارای ۷ الکترون با $l=۰$ است.

۱۷۰ **۳** نمونهٔ (۱): فلزهای Cd و Cu

طول موج‌های ۳۶۱، ۴۶۸ و ۴۸۱ متعلق به فلز Cd است.

طول موج‌های ۵۱۱، ۵۱۵، ۵۲۲ و ۵۷۸ متعلق به فلز Cu است.

نمونهٔ (۲): فلزهای Cr و Sr

طول موج‌های ۳۵۷، ۳۶۱، ۴۲۵، ۴۲۷، ۴۲۹ و ۵۲۱ متعلق به فلز Cr است.

طول موج‌های ۴۰۸، ۴۲۱، ۴۳۱، ۴۶۱، ۴۸۷ و ۴۹۶ متعلق به فلز Sr است.

۱۷۱ **۳** **بررسی سایر گزینه‌ها:**

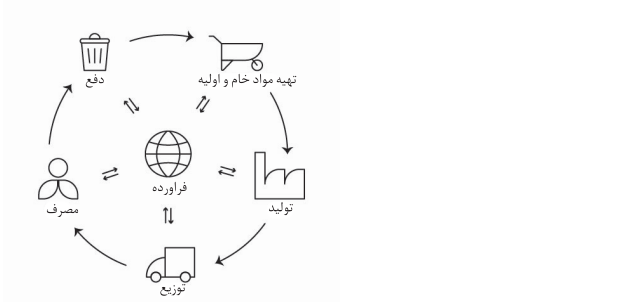
۱) بازیافت فلزها می‌تواند با انتشار گازها و ذره‌های آلاینده همراه باشد.

۲) فناوری به کار رفته در بازیافت فلزها در میزان انرژی مصرفی، تأثیرگذار است.

۴) فلزها جزء منابع تجدیدناپذیر هستند.

۱۷۲ **۲** امروزه پژوهشگران از ارزیابی چرخهٔ عمر برای میزان تأثیر یک فراورده بر محیط‌زیست در طول عمر آن بهره می‌برند؛ چرخه‌ای با پنج مرحله شامل تهیهٔ مواد خام و اولیه، تولید، توزیع، مصرف و دفع.

با بررسی این چرخه برای یک فراورده، میزان آب و انرژی مصرفی، ادامهٔ فرایند بر اساس تأمین مواد خام و اولیه، میزان زباله‌ها و پسماند و همچنین هزینهٔ حمل و نقل در هر مرحله بررسی می‌شود.



۱۷۳ **۴** سیلیسیم عنصر اصلی سازندهٔ سلول‌های خورشیدی است که از واکنش زیر تهیه می‌شود:

$$SiO_۲(s)+۲C(s)\xrightarrow{\Delta}Si(l)+۲CO(g)$$

در این واکنش گاز **کربن مونوکسید** تولید می‌شود.

۱۷۴ **۳** با توجه به داده‌های سؤال فرمول مولکولی A را می‌توان به صورت $C_۴H_۲$ در نظر گرفت:

$$H-C\equiv C-C\equiv C-H$$

هر مولکول از A شامل ۲ اتم هیدروژن و ۹ جفت الکترون پیوندی است.

۱۷۵ **۲** **بررسی عبارت‌های نادرست:**

آ) **هر هیدروکربن خطی** که تمام پیوندهای آن یگانه باشد، یک آلکان است.

دقت کنید که هیدروکربن‌های حلقوی سیرشده، سیکلوآلکان هستند.

ت) با توجه به واکنش‌پذیری کم آلکان‌ها، **اغلب** به عنوان سوخت به کار می‌روند.

۱۷۶ **۴** واکنش تبدیل ۱ـ هگزن به هگزان نیاز به کاتالیزگری مانند Ni دارد تا به سرعت انجام شود:

$$C_۶H_{۱۲}(l)+H_۲(g)\xrightarrow{Ni}C_۶H_{۱۴}(l)$$

۱۷۷ **۲** در اعماق دریاها و اقیانوس‌ها، در برخی مناطق سولفید چندین فلز واسطه و در برخی مناطق دیگر، کلوخه‌ها و پوسته‌هایی غنی از فلزهایی مانند Mn، Co، Ni، Cu، Fe و... یافت شده است.

۱۷۸ **۴** فرمول مولکولی هر کدام از ساختارهای داده‌شده $C_۸H_{۱۲}O$ است:

$$\frac{\text{شمار اتم‌های کربن در ترکیب a و b}}{\text{شمار اتم‌های هیدروژن در ترکیب c}}=\frac{۸+۸}{۱۲}=\frac{۴}{۳}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

t.me/konkurbanks

۱۷۹ **۲** **بررسی عبارت‌ها:**

آ) در هر کدام از چهار نوع نفت خام (برنت دریای شمال ـ سبک کشورهای عربی ـ سنگین کشورهای عربی ـ سنگین ایران)، درصد نفت کوره بیش‌تر از سایر اجزاست.

ب) مقایسه میان فراریت مولکول‌ها به صورت زیر است:

نفت کوره < گازوئیل < نفت سفید < بنزین و خوراک پتروشیمی

پ) مقایسه میان اندازهٔ مولکول‌ها به صورت زیر است:

بنزین و خوراک پتروشیمی < نفت سفید < گازوئیل < نفت کوره

ت) هر چه مولکول‌ها کوچک‌تر باشند، در ارتفاع بالاتری از برج تقطیر جداسازی می‌شوند.

۱۸۰ **۳** فرمول مولکولی بنزن به صورت C_6H_6 است.

بررسی عبارت‌ها:

آ) بنزن سر گروه هیدروکربن‌های **آروماتیک** است نه حلقوی!!

ب) فرمول مولکولی هر کدام از هیدروکربن‌های حلقوی سیرنشدهٔ زیر به صورت C_6H_6 است:



پ) شمار اتم‌های هر مولکول آلکان (C_nH_{2n+2}) برابر با $3n+2$ است. به‌ازای هیچ مقدار صحیحی از n، این عبارت برابر با ۱۲ نخواهد شد.

ت) در ساختار بنزن، ۶ پیوند $C-H$، ۳ پیوند $C=C$ و ۳ پیوند $C-C$ وجود دارد:



۱۸۱ **۲** هر مول از آلکن با فرمول C_nH_{2n} برای واکنش سوختن کامل به $\frac{3n}{2}$ مول گاز اکسیژن نیاز دارد:

$$C_nH_{2n}+\frac{3n}{2}O_2 \rightarrow nCO_2+nH_2O$$

مطابق داده‌های سؤال می‌توان نوشت:

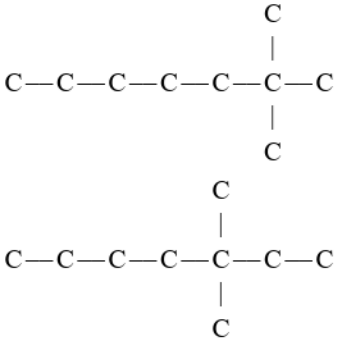
$$\frac{3n}{2}=9 \Rightarrow n=6 \Rightarrow \text{فرمول آلکن A}: C_6H_{12}$$

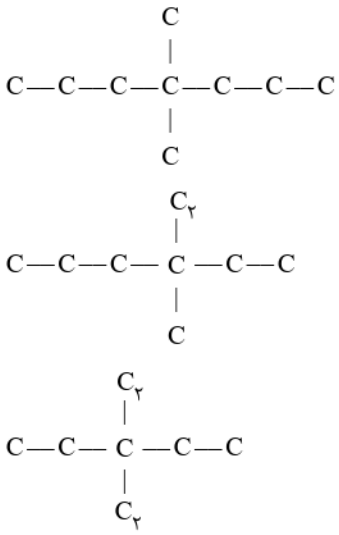
معادلهٔ واکنش آلکن A با برم به صورت زیر است:

$$C_6H_{12}+Br_2 \rightarrow C_6H_{12}Br_2$$

$$\frac{\text{جرم مولی فراورده}}{\text{جرم مولی A}}=\frac{6(12)+12(1)+2(80)}{6(12)+12(1)} \simeq 2/90$$

۱۸۲ **۳** فرمول مولکولی آلکان موردنظر به صورت C_9H_{20} است. مطابق داده‌های سؤال، ساختارهای زیر را می‌توان در نظر گرفت:





۱۸۳ **۴** یکی از مشکلات زغال‌سنگ، شرایط دشوار استخراج است. به گونه‌ای که در سدهٔ اخیر بیش از ۵۰۰۰۰۰ نفر در سطح جهان در اثر انفجار یا فرو ریختن معدن جان خود را از دست داده‌اند.

این انفجارها اغلب به دلیل تجمع گاز متان آزاد شده از زغال‌سنگ در معدن رخ می‌دهد. متان گازی سبک، بی‌بو و بی‌رنگ است و هرگاه مقدار آن در هوای معدن به بیش از ۵ درصد برسد، احتمال انفجار وجود دارد. البته با افزایش درصد متان تا مقدار معینی، هم‌چنان احتمال انفجار وجود خواهد داشت. بنابراین ضروری است استانداردها و اصول ایمنی در معدن به طور دقیق رعایت و مقدار گاز متان در هوای معدن پیوسته اندازه‌گیری و کنترل شود. البته یکی از راه‌های کاهش متان در هوای معدن استفاده از تهویهٔ مناسب و قوی است.

۱۸۴ **۴** فرمول مولکولی نخستین عضو خانوادهٔ سیکلوآلکان‌ها به صورت C_3H_6 و فرمول مولکولی پنجمین عضو خانوادهٔ آلکن‌ها به صورت C_6H_{12} است.

$$2C_3H_6+O_2 \rightarrow 6CO_2+6H_2O$$

$$\frac{105gC_3H_6 \times \frac{80}{100}}{2\times 42}=\frac{x\,mol H_2O}{6} \Rightarrow x=6\,mol H_2O$$

$$C_6H_{12}+H_2O \xrightarrow{H_2SO_4} C_6H_{13}OH$$

$$\frac{6\,mol H_2O \times \frac{80}{100}}{1}=\frac{y\,g\,C_6H_{13}OH}{1\times 102} \Rightarrow y=489/6\,g\,C_6H_{13}OH$$

۱۸۵ **۳** **بررسی عبارت‌های نادرست:**

آ) گرافیت و الماس جزء دگرشکل‌های کربن بوده و فقط از این عنصر تشکیل شده‌اند.

پ) هر بشکه نفت خام هم‌ارز با ۱۵۹ لیتر است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir
t.me/konkurbanks
@Tahlilazemoon